高等代数选讲
Selection of Advanced Algebra

第一讲：行列式
Lecture 1: Determinants

主讲教师：艾武

数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics
桂林理工大学
Guilin University of Technology

内容概要

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

行列式的定义

行列式的性质

行列式按行（列）展开

行列式的计算方法

克拉默法则

2 典型例题

知识点 1: 用定义计算或证明行列式

知识点 2: 化（上、下或次）三角法

知识点 3: 滚动相消法

知识点 4: 拆分法

知识点 5: 加边法

知识点 6: 递推公式法

知识点 7: 重要行列式

知识点 8: 降级公式

知识点 9: 数学归纳法

(一) n 级行列式的定义

n 级**行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

等于所有取自式 (1) 中**不同行不同列**的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{2}$$

的**代数和**, 式 (2)称为 n 级行列式 (1) 的一般项, 其中的 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列, 而且当 $j_1j_2\cdots j_n$ 每取定一个 n 级排列式时, 由式 (2) 就得到 n 级行列式 (1) 的一项, 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列式时, 由式 (1) 就给出 n 级行列式(1)的所有项。一般项式 (2) 按下列规则带有符号: 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时, 式 (2)前面带正号; 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时, 式 (2) 前面带负号, 即

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{4}$$

- 式(3)是按行来定义 n 级行列式的, 而式(4)是按列来定义 n 级行列式的。
- 由 n 级排列的性质可知, n 级行列式共有 $n!$ 项, 其中冠以正号的项和冠以负号的项 (不算元素本身所带的负号) 各占一半。
- 如果 n 级行列式(1)中的每个元素都是数, 那么 n 级行列式 (1)本质上就是一个数, 将该数求出就称为计算 n 级行列式(1)。

1. 上三角行列式、下三角行列式、对角行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & * & \cdots & * \\
0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & * \\
0 & \cdots & 0 & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
* & a_{22} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
* & \cdots & * & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{nn}
\end{vmatrix}
= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
$$

2. 副对角方向的行列式（次三角行列式、次对角行列式）

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2,n-1} & 0 \\ * & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2,n-1} & * \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2,n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

3. 箭形（或爪形）行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j c_j}{a_j} \right)$$

注：$(a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$。上面给出的是形如 $\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$ 的**箭形**(或爪形) 行列

式, 还有其他形状的箭形行列式:

$$
\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots \\
 & \iddots & \vdots \\
\iddots & & \vdots
\end{vmatrix},
\qquad
\begin{vmatrix}
\ddots & & \vdots \\
 & \ddots & \vdots \\
\cdots & \cdots & \vdots
\end{vmatrix},
\qquad
\begin{vmatrix}
\vdots & & \iddots \\
\vdots & \iddots & \\
\iddots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}
$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n\right)$$

注：**么形**行列式也有多种形状, 下列形状的行列式都是么形行列式:

$$\begin{vmatrix} & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \\ \iddots & \iddots & & \\ \iddots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ \iddots & \iddots & & \vdots \\ \iddots & & & \vdots \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \iddots \\ & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \\ \iddots & \iddots & & \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \vdots & & & \iddots \\ \vdots & & \iddots & \iddots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ \iddots & & & \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
\ddots & \ddots & & \\
& \ddots & \ddots & \\
& & \ddots & \ddots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{vmatrix},
\qquad
\begin{vmatrix}
\ddots & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \\
\vdots & & \ddots & \ddots \\
\vdots & & & \ddots
\end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix}
\ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ddots & \ddots & & \\
& \ddots & \ddots & \\
& & \ddots & \ddots
\end{vmatrix},
\qquad
\begin{vmatrix}
\ddots & & & \vdots \\
\ddots & \ddots & & \vdots \\
& \ddots & \ddots & \vdots \\
& & \ddots & \ddots
\end{vmatrix}
$$

5. 行和（列和）相同的行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

6. 范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j), \quad (n \geqslant 2)$$

内容概要

二、行列式的性质

（1）**转置不变**：行列式与它的转置行列式相等。

（2）**对换反号**：互换行列式的两行 (列), 行列式变号。

（3）**行因可提、行零为零**：行列式中某一行 (列) 中所有的元素都乘以同一个数, 等于用这个数乘以此行列式, 即某一行 (列) 中所有的元素的公因子可以提到整个行列式的外面。

（4）**比例为零、行同为零**：若行列式中有两行 (列) 成比例, 则此行列式等于零。

（5）**行和可分**：若行列式中某一行（列）是两组数之和, 则这个行列式等于两个行列式之和, 而这两个行列式除这一行（列）以外全与原来行列式的对应的行（列）一样。

（6）**倍加不变**：把行列式某一行 (列) 的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）对应的元素上，行列式不变。

内容概要

三、行列式按行（列）展开

设 n 级行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（一）子式

（1）**余子式**: 在 n 级行列式 D_n 中, 去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后, 余下的 $n-1$ 级行列式称为 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} 。

（2）**代数余子式**: 将 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 n 级行列式 D_n 中元素 a_{ij} 的代数余子式。

（3）k **级子式**: 在 n 级行列式 D_n 中, 任意选定 k 行和 k 列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 按原来顺序构成一个 k 级行列式 M, 称为 D 的一个 k 级子式。

当 $(k<n)$ 时, 在 D 中划去这 k 行和 k 列后余下的元素按照原来的次序组成的 $n-k$ 级行列式 M' 称为 k 级子式 M 的余子式。

如果 M 位于 D_n 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行, 第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列, 那么将 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M'$ 称为 k 级子式 M 的代数余子式。

（二）按一行（列）展开

（1）n 级行列式 D_n 的任一行 (列) 各元素与其代数余子式乘积之和等于 n 级行列式 D_n，即按第 i 行展开:

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

按第 j 列展开:

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

（2）n 级行列式 D_n 的某一行 (列) 各元素与另一行 (列) 对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

（三）（拉普拉斯定理）按 k 行（k 列）展开

拉普拉斯定理:

在 n 级行列式 D_n 中, 任意取定 k 行 (k 列) $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, 由这 k 行 (k 列) 元素组成的所有的 k 级子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D_n 的值。

（四）行列式的乘法定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

式 (5)中的 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 。

内容概要

四、行列式的计算方法

- （1）用定义计算行列式
- （2）用行列式性质化为已知行列式
- （3）化（上/下）三角法
- （4）滚动相消法
- （5）拆分法
- （6）加边法
- （7）利用递推公式法
- （8）利用重要公式化成常见行列式
- （9）利用降级公式计算行列式
- （10）数学归纳法
- （11）其他方法

注：具体计算行列式时，需要根据行列式中行（或列）元素的特点来选择相应的计算方法，而且每个行列式的计算方法并不唯一，但是计算结果相同。

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

行列式的定义

行列式的性质

行列式按行（列）展开

行列式的计算方法

克拉默法则

2 典型例题

知识点 1: 用定义计算或证明行列式

知识点 2: 化（上、下或次）三角法

知识点 3: 滚动相消法

知识点 4: 拆分法

知识点 5: 加边法

知识点 6: 递推公式法

知识点 7: 重要行列式

知识点 8: 降级公式

知识点 9: 数学归纳法

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{6}$$

式(6)含有 n 个未知量 n 个方程, 其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

当 $D \neq 0$ 时, 线性方程组(6)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D} \tag{8}$$

式 (8) 中的 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用线性方程组 (6)右端的常数项代替后所得到的 n 级行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0
\end{cases} \tag{9}
$$

式(9) 是含 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组, 它**只有零解**的充分必要条件是系数行列式 $D \neq 0$;

它**有非零解**的充分必要条件是系数行列式 $D = 0$。

内容概要

例 2.1 计算

(1) $$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}。$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解:（1）行列式 D_n 刚好只有一项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 不为零, 故

$$D_n=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!$$

（2）利用行列式定义可知

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}+(-1)^{\tau(23\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}\\&=\underbrace{x\cdot x\cdot\cdots\cdot x}_{n}+(-1)^{n-1}\underbrace{y\cdot y\cdot\cdots\cdots}_{n}\\&=x^n+(-1)^{n-1}y^n\end{aligned}$$

注: **当行列式中含有零元素较多时, 用定义法计算较简便。**

例 2.2 证明:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
=&\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{10}
$$

证明：式 (10)

$$
\begin{aligned}
\text{左端} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1, \cdots i_j \cdots i_n)} a_{i_1,1}(t) \cdots a_{i_j,j}(t) \cdots a_{i_n,n}(t) \\
&= \sum_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_j \cdots i_n)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(a_{i_1,1}(t) \cdots a_{i_j,j}(t) \cdots a_{i_n,n}(t) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i_1 \cdots i_j \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_j \cdots i_n)} a_{i_1,1}(t) \cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_{i_j,j}(t) \cdots a_{i_n,n}(t) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

例 2.3 设 4 级矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\2\gamma_2\\3\gamma_3\\4\gamma_4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维行向量, 且 $|\boldsymbol{A}|=8,|\boldsymbol{B}|=1$, 计算 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$ 。

解:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| &= \left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\2\gamma_2\\3\gamma_3\\4\gamma_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\\\gamma_2\\2\gamma_3\\3\gamma_4\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\\gamma_2\\2\gamma_3\\3\gamma_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\gamma_2\\2\gamma_3\\3\gamma_4\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\2\gamma_2\\3\gamma_3\\4\gamma_4\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{vmatrix}\\
&= \frac{1}{4}|\boldsymbol{A}|-6|\boldsymbol{B}|=-4
\end{aligned}
$$

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

行列式的定义

行列式的性质

行列式按行（列）展开

行列式的计算方法

克拉默法则

2 典型例题

知识点 1: 用定义计算或证明行列式

知识点 2: 化（上、下或次）三角法

知识点 3: 滚动相消法

知识点 4: 拆分法

知识点 5: 加边法

知识点 6: 递推公式法

知识点 7: 重要行列式

知识点 8: 降级公式

知识点 9: 数学归纳法

例 2.4 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$。

解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=(-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 25$$

注：利用行列式的性质将原行列式化为上（下）三角行列式。

例 2.5 计算箭形 (或爪形) 行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

解：用 $a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 将 c_i 化成 0，也可用 $a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 将 b_i 化成 0，即用主对角线上的元素（第一个除外）将它们所在的行（或列）另一个非零元化成 0。

将第 $j(j = 2, \cdots n + 1)$ 列的 $-\frac{c_{j-1}}{a_{j-1}}$ 倍加到第 1 列，得

$$
D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j b_j}{a_j} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}
$$

$$
= a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j c_j}{a_j} \right)
$$

注：对于箭形或爪形行列式, 可用主对角线或副对角线将两条非零边中的一条化为零, 从而将其化为三角行列式或次三角行列式进行计算。

例 2.6 计算么形行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \quad (x \neq 0)$$

解: 用副对角线上的元素 (除左下角的元素 $x+a_1$) 将所在行的另一个非零元素化成 0 。从最后一列开始, 依次将后列的 $\frac{1}{x}$ 倍加到前一列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ x+a_1+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}} & a_2+\frac{a_3}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-2}} & \cdots & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x^{n-1} \left(x+a_1+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^{n-1}} \right)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \right)$$

注：对么形行列式，一般是用其主对角线或副对角线把与其平行的那一撇元素都化为 0，即将么形行列式化成三角或次三角行列式来进行计算。

内容概要

例 2.7 (浙江大学, 2010 年) 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix}。$$

解： 从最后一行开始, 依次后行减去前行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & -n & \cdots & 0 \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

得到的行列式类似于箭形行列式, 将其第 $j(j=2,3,\cdots,n)$ 列的 $\frac{1}{n}$ 倍都加到第 1 列, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n} & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \frac{n+1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-n)^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(n+1)}{2}n^{n-1}$$

注：当行列式每两行对应元素比较拉近时，可采取令相邻行中的某一行减 (或加) 上另一行的若干倍，这种方法称为**滚动相消法**。

一般利用此方法后，最好在化简后的行列式的第一行 (列) 能产生较多的零，以便再利用降级法来计算。

内容概要

知识点 4: 拆分法

例 2.8 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & b & b & \cdots & b \\ c & x & b & \cdots & b \\ c & c & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x \end{vmatrix}$。

解：将 D_n 的第 1 列拆分为如下形式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x-c & b & b & \cdots & b \\ 0 & x & b & \cdots & b \\ 0 & c & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & x & b & \cdots & b \\ c & c & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-c)D_{n-1} + c(x-b)^{n-1}$$

同理, 可将 D_n 的第 1 行拆分为如下形式:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & x & b & \cdots & b \\ c & c & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ c & x & b & \cdots & b \\ c & c & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= (x-b)D_{n-1} + b(x-c)^{n-1} \end{aligned}$$

当 $c \neq b$ 时, 得

$$D_n = \frac{c(x-b)^n - b(x-c)^n}{c-b}$$

当 $c=b$ 时,

$$D_n=\begin{vmatrix} x & b & \cdots & b \\ b & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

D_n 的各列（行）元素之和相等, 都等于 $x+(n-1)b$, 所以将 D_n 的第 2 行至第 n 行都加到第 1 行得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)b & x+(n-1)b & \cdots & x+(n-1)b & x+(n-1)b \\ b & x & \cdots & b & b \\ b & b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & x & b \\ b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)b)(x-b)^{n-1}$$

例 2.9 证明:

(1)

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\
a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+ x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \tag{11}
$$

式(11)中等号右端第二项里的 A_{ij} 是第一项行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式。

(2) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$。

证明：（1）**方法 1**

拆式(11)中等号左端行列式的第 1 列得

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\
a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\
a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\
x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x \sum_{i=1}^{n} A_{i1}
$$

即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\
a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\
a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1} \tag{12}
$$

类似地, 对式(12)右端第一项行列式拆第 2 列可得

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1} \\
=\cdots=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{in} + \cdots + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1} \\
=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}
\end{aligned}
$$

方法 2

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\
a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix}
$$

$$
\overset{\text{升级}}{=}
\begin{vmatrix}
1 & x & \cdots & x \\
0 & a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x
\end{vmatrix}
\overset{r_i-r_1(i=2,3,\ldots,n)}{=}
\begin{vmatrix}
1 & x & \cdots & x \\
-1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + \cdots + x\sum_{i=1}^{n} A_{in}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \text{右端}$$

(2) 在 (1) 中令 $x = 1$, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

又因为

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\
a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n}+1 \\
a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n}+1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn}+1
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\
a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix}
a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & a_{1n} \\
a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\
a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1
\end{vmatrix}
+ \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

因此有

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\
a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1
\end{vmatrix}
= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}
$$

注：将行列式的某一行 (列) 的各元素均写成两数和的形式, 再利用行列式的性质写成两个行列式的和, 使问题简化以利于计算。

内容概要

例 2.10 （华中师范大学，2000 年）计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$$

解：用加边法得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & x+1 & x & \cdots & x \\ 0 & x & x+\frac{1}{2} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}_{n+1}$$

得到的行列式是箭形或爪形行列式, 将其第 2 列乘以 1 , 第 3 列乘以 $2 \cdots\cdots$ 第 $n+1$ 列乘以 n 并都加到第 1 列得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^{n} kx & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{n(n+1)}{2}x\right)$$

例 2.11 计算 $D_n = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & -a_2a_3 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & -a_na_3 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}$, 其中 λ 为常数。

解: 利用加边法得 $D_n =$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}_{n+1}$$

再利用箭形行列式计算法, 即第 2 列乘以 $-\frac{a_1}{\lambda}$, 第 3 列乘以 $-\frac{a_2}{\lambda}\cdots\cdots$ 第 $n+1$ 列乘以 $-\frac{a_n}{\lambda}$, 统统加到第 1 列得

$$D_n = \lambda^n \left(1 - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

注：加边法是将所要计算的 n 级行列式适当地添加 1 行 1 列（或 m 行 m 列）得到一个新的 $n+1$（或 $n+m$）级行列式，保持行列式的值不变，所得到的 $n+1$（或 $n+m$）级行列式较易计算，它可化为一些熟知的行列式，例如**箭形**行列式、三**角**行列式或**次**三**角**行列式等。

其一般做法如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n+1}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n+1}$$

特殊情况时取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ 。一般采用加边法计算的行列式 D_n ，除主对角线上的元素外，第 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 行的元素分别是其他 $n-1$ 行元素的倍数。

内容概要

例 2.12 计算箭形行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=0,1,2,\cdots,n)\text{。}$$

解: 按第 $n+1$ 行展开有

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (-1)^{n+2}c_n\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + a_nD_n \\ &= (-1)^{n+2}(-1)^{n+1}c_nb_na_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_n \\ &= a_nD_n-\frac{c_nb_n}{a_n}a_1a_2\cdots a_n \end{aligned}$$

对 D_n 再应用上述过程可得

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= a_n\left(a_{n-1}D_{n-1} - \frac{b_{n-1}c_{n-1}}{a_{n-1}}a_1a_2\cdots a_{n-1}\right) - \frac{b_nc_n}{a_n}a_1a_2\cdots a_n \\ &= a_na_{n-1}D_{n-1} - \frac{b_{n-1}c_{n-1}}{a_{n-1}}a_1a_2\cdots a_n - \frac{b_nc_n}{a_n}a_1a_2\cdots a_n \\ &= \cdots = a_1a_2\cdots a_n\left(a_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right) \end{aligned}$$

注：若一个行列式在元素分布上比较有规律, 则可以设法找出 n 级行列式 D_n 与较低级的行列式之间的关系, 依此类推来计算行列式的值。

递推法计算行列式的关键是找出一个代数式来表示 D_n, 依次从 $D_1 \to D_2 \to D_3 \to \cdots \to D_n$ 逐次递推便可得出 D_n 的值。

为了更好地应用递推法，下面引入几个递推公式。

（1）若 n 级行列式满足递推公式 $D_n = pD_{n-1}$，则可推出 $D_n = p^{n-1}D_1$ 。

（2）若 n 级行列式满足递推公式 $D_n = pD_{n-1} + r$，则可推出 $D_n = p^{n-1}D_1 + r\frac{p^{n-1}-1}{p-1}$ 。

（3）若 n 级行列式满足递推公式 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$，则可推出

$$D_n = \begin{cases} \frac{D_2-\beta D_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1} - \frac{D_2-\alpha D_1}{\alpha-\beta}\beta^{n-1} & \left(p^2+4q>0\right) \\ \alpha^{n-1}D_1 + \left(D_2 - D_1\beta\right)(n-1)\alpha^{n-2} & \left(p^2+4q=0\right) \end{cases} \tag{13}$$

以上公式中 p, q, r 是与 n 无关的常数，α, β 是方程 $x^2 - px - q = 0$ 的根，当 $p^2 + 4q = 0$ 时 $\alpha = \beta$ 。

例 2.13 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解： **方法 1** 公式法。

将 D_n 按第 1 列展开, 得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

其中 $p = \alpha+\beta, q = -\alpha\beta$ 。

当 $\alpha \neq \beta$ 时；$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2>0$, 代入式(13)可得

$$D_n=\frac{D_2-\beta D_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{D_2-\alpha D_1}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$$

可得 $D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ 。

当 $\alpha=\beta$ 时, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2=0$, 代入式(13)中的公式

$$D_n=\alpha^{n-1}D_1+(D_2-D_1\beta)(n-1)\alpha^{n-2}$$

可得 $D_n=(n+1)\alpha^n$ 。

方法 2 递推法。将 D_n 按第 1 行展开, 得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

因此

$$\begin{aligned}&D_n - \alpha D_{n-1} = \beta\left(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}\right)\\&= \beta^2\left(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}\right) = \cdots = \beta^{n-2}\left(D_2 - \alpha D_1\right) = \beta^n\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n\\&D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \beta^{n-1}\\&\cdots\cdots\\&D_2 - \alpha D_1 = \beta^2\end{aligned}$$

即

$$
\begin{aligned}
&D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n \\
&\alpha D_{n-1} - \alpha^2 D_{n-2} = \alpha\beta^{n-1} \\
&\alpha^2 D_{n-2} - \alpha^3 D_{n-3} = \alpha^2\beta^{n-2} \\
&\quad \cdots\cdots \\
&\alpha^{n-2} D_2 - \alpha^{n-1} D_1 = \alpha^{n-2}\beta^2
\end{aligned}
$$

因此

$$
D_n = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-2}\beta^2 + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^n
$$

即

$$
D_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & (\alpha = \beta) \\ \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \end{cases}
$$

例 2.14 计算 n 级三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

解: 将行列式按第 1 行展开, 得到递推公式

$$D_n = D_{n-1} - \frac{1}{4} D_{n-2}$$

解方程 $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, 得

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

代入式(13)中的公式

$$D_n = \alpha^{n-1} D_1 + (D_2 - D_1 \beta)(n-1)\alpha^{n-2}$$

得

$$D_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{2^n}(n+1)$$

内容概要

例 2.15 (云南大学, 2004 年）计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解:

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} ((a-i)-(a-j)) \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (j-i) \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} ((-1)(-2)\cdots(-n))((-1)(-2)\cdots(-(n-1)))\cdots((-1)(-2))(-1) \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n!)((n-1)!)\cdots(2!)(1!) \\
&= \prod_{k=1}^{n} k!
\end{aligned}
$$

注：将所求行列式化为比较熟悉的行列式, 例如范德蒙德行列式、三角行列式、次三角行列式等。

内容概要

知识点 8: 降级公式

例 2.16 计算么形行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$ $(x \neq 0)$ 。

解：**方法 1** 拆分法。令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}_{n-1,n-1}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{n-1,1}$$

$$\boldsymbol{C}=(a_n,a_{n-1},\cdots,a_2),\quad \boldsymbol{D}=x+a_1$$

则 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}, |\boldsymbol{A}|=x^{n-1}\neq 0$, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & \frac{1}{x^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{x} & \cdots & \frac{1}{x^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

又 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, 故

$$
\begin{aligned}
D_n = |\boldsymbol{G}| &= |\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right| \\
&= x^{n-1}\left[(a_1+x)+\left(\frac{a_n}{x^{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-2}}+\cdots+\frac{a_2}{x}\right)\right] \\
&= x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n
\end{aligned}
$$

注：设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 是一个 n 级方阵, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 分别是

$$
r\times r, r\times(n-r), (n-r)\times r, (n-r)\times(n-r)
$$

级矩阵。若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|$。

方法 2 递推法。

$$\left.\begin{array}{l} D_n = xD_{n-1} + a_n \\ D_{n-1} = xD_{n-2} + a_{n-1} \\ D_{n-2} = xD_{n-3} + a_{n-2} \\ \cdots\cdots \\ D_3 = xD_2 + a_3 \\ D_2 = xD_1 + a_2 \\ D_1 = x + a_1 \end{array}\right\} \text{推出} \left\{\begin{array}{c} D_n = \cancel{xD_{n-1}} + a_n \\ \cancel{xD_{n-1}} = \cancel{x^2 D_{n-2}} + a_{n-1}x \\ \cancel{x^2 D_{n-2}} = \cancel{x^3 D_{n-3}} + a_{n-2}x^2 \\ \cdots\cdots \\ \cancel{x^{n-3} D_3} = \cancel{x^{n-2} D_2} + a_3 x^{n-3} \\ \cancel{x^{n-2} D_2} = \cancel{x^{n-1} D_1} + a_2 x^{n-2} \\ \cancel{x^{n-1} D_1} = x^n + a_1 x^{n-1} \end{array}\right.$$

将上面右侧的一串等式加起来, 消掉两端都有的项得

$$D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

方法 3 数学归纳法。由于

$$D_2 = x^2 + a_1 x + a_2; \quad D_3 = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

因而猜想

$$D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

用第一数学归纳法来证明。

证明：当 $n = 2$ 时结论成立。假设结论对行列式的级数为 $n - 1$ 时成立, 接下来证明行列式的级数为 n 时, 结论也成立。对 D_n 按第 1 列展开, 得

$$\begin{aligned} D_n &= x D_{n-1} + a_n \\ &= x \left(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1} \right) + a_n \\ &= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \end{aligned}$$

即证得结论对行列式的级数为 n 时也成立, 从而结论成立。

内容概要

知识点 9: 数学归纳法

例 2.17 计算 $D_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$。

证明: 由于 $D_1 = \cos\theta, D_2 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$, 因而猜想 $D_n = \cos n\theta$ 。用第二数学归纳法来证明。

当 $n = 1$ 时结论成立。假设结论对行列式的级数小于或者等于 $n - 1$ 时成立, 接下来证明行列式的级数为 n 时, 结论也成立。对 D_n 按最后一行展开, 得

$$D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$$

由归纳假设得

$$D_{n-1} = \cos(n-1)\theta, \quad D_{n-2} = \cos(n-2)\theta$$

于是

$$\begin{aligned} D_n &= 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \\ &= (\cos(\theta + (n-1)\theta) + \cos(\theta - (n-1)\theta)) - \cos(n-2)\theta \\ &= \cos n\theta \end{aligned}$$

即证结论对行列式级数为 n 时也成立, 从而结论成立。

注：数学归纳法分两步。第一步是发现和猜想, 第二步是证明猜想的正确性。而第二步的关键是首先要得到 D_n 关于 D_{n-1} 和 D_{n-2} 的递推关系式。