高等代数选讲
Selection of Advanced Algebra

第二讲：多项式
Lecture 2: Polynomials

主讲教师：艾武

数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics
桂林理工大学
Guilin University of Technology

内容概要

内容概要

（一）多项式的定义

设 P 是一个**数域**, x 为一个**文字**。形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{1}$$

式 (1)中的 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P, n$ 是非负整数, 称为系数在数域 P 中的一个一元多项式, 简称数域 P 上的**一元多项式**。

在式 (1) 中, a_ix^i 称为 $f(x)$ 的第 i 次**项**, a_i 称为 $f(x)$ 的第 i 次项**系数**。

当 $a_n\neq 0$ 时, 称多项式 $f(x)$ 的**次数**为 n, 记为 $\partial(f(x))=n$, 称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的**首项**, a_n 为 $f(x)$ 的**首项系数**;

当 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$ 且 $a_0\neq 0$ 时, 称多项式 $f(x)$ 为**零次多项式**, 即 $\partial(f(x))=0$; 系数全为零的多项式, 称为**零多项式**。

注：**零多项式是唯一不定义次数的多项式。**

（二）多项式的相等

数域 P 上的两个一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**是指它们有完全相同的项。

(1) 证明两个多项式相等除了利用定义外, 还可以在两个多项式首项系数相等的情况下, 证明它们相互整除。

(2) 由多项式相等的定义可知, 在一个多项式中, 系数为零的项可以省略不写, 当然有时为了讨论问题方便, 也可以添加一些系数为零的项。

(3) 由多项式相等的定义还可知零多项式就是数 0 , 于是数域 P 中的数都是数域 P 上的一元多项式: P 中的非零数都是零次多项式, 而数 0 是零多项式。

(4) 将首项系数为 1 的多项式简称为**首 1 多项式**。

（三）多项式的加法与乘法

设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ 是数域 P 上两个多项式。不妨设 $n \geqslant m$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和表示成

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i+b_i\right) x^i \tag{2}$$

而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积表示成

$$f(x) g(x)=\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s} a_i b_j\right) x^s \tag{3}$$

式(2)、式 (3)中的 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$ 。

(1) 多项式的加法和乘法与整数的加法和乘法满足相同的运算规律。

(2) 将数域 P 上的一元多项式的全体, 称为数域 P 上的**一元多项式环**, 记为 $P[x]$ 。

设 $f(x), g(x) \in P[x]$ 。

性质 1 当 $f(x) \pm g(x) \neq 0$ 时,

$$\partial(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max\{\partial(f(x)), \partial(g(x))\}$$

性质 2 若 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$, 则 $f(x)g(x) \neq 0$, 且

$$\partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$$

内容概要

设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 且 $g(x) \neq 0$, 则存在唯一的多项式 $q(x), r(x) \in P[x]$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \tag{4}$$

成立, 在式 (4)中 $r(x) = 0$ 或 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ 。将式(4)中 $q(x)$ 和 $r(x)$ 分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**商式**和**余式**。

注：带余除法是多项式分类的工具, 是**辗转相除法**的基础, 也是求最大公因式的基础。

1. 整除的定义

设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 若存在 $q(x) \in P[x]$, 使得 $f(x) = q(x)g(x)$, 则称 $g(x)$ **整除** $f(x)$, 记为 $g(x) \mid f(x)$ 。此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的**因式**, $f(x)$ 为 $g(x)$ 的**倍式**。否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 记为 $g(x) \nmid f(x)$ 。

2. 整除的判定方法

方法 1 定义法。

方法 2 设 $g(x) \neq 0$, 利用带余除法, 即 $g(x) \mid f(x)$ 当且仅当以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 0 。

方法 3 验根法。设 c 为 $g(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 的任一根, 证明 c 也必为 $f(x)$ 的根, 且 c 在 $g(x)$ 中的重数不超过 c 在 $f(x)$ 中的重数。

3. 整除的性质

性质 1 $f(x) \mid g(x)$ 且 $g(x) \mid f(x)$ 当且仅当存在 $0 \neq c \in P$, 使得 $f(x) = cg(x)$ 。

性质 2 若 $f(x)|g(x), g(x)|h(x)$ ，则 $f(x) \mid h(x)$ 。

性质 3 若 $g(x) \mid f_i(x)$, 则

$$g(x) \mid \sum_{i=1}^{r} u_i(x) f_i(x), \quad \forall u_i(x) \in P[x], \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

内容概要

设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 若 $P[x]$ 中的多项式 $d(x)$ 满足:

- $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式;
- $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式,

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**。

注：(1) 如果 $f(x) = g(x) = 0$, 那么它们有唯一的最大公因式就是 0。

(2) 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零, 那么它们有无数个最大公因式, 这些最大公因式都不等于零, 但它们彼此只差一个非零常数倍, 即若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 则 $d(x) \neq 0$, 且集合 $\{cd(x) \mid c \in P, c \neq 0\}$ 给出了 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有最大公因式。因此, 此时若能求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 就可以求出它们所有的最大公因式, 注意到集合 $\{cd(x) \mid c \in P, c \neq 0\}$ 中首 1 多项式只有一个, 将其记为 $(f(x), g(x))$, 我们只需求出 $(f(x), g(x))$ 即可。

（二）最大公因式的性质

性质 1 设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式, 则存在 $u(x), v(x) \in P[x]$, 使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

性质 2 对数域 P 中任意不等于零的数 k, l, 有 $(f(x), g(x)) = (kf(x), lg(x))$ 。

性质 3 设 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 则 $(f(x), g(x)) = (g(x), r(x))$ 。

注：对任意 $u(x), v(x) \in P[x]$, 有

$$f(x) =(-u(x))g(x) + (f(x) + u(x)g(x)) \tag{5}$$

$$g(x) =(-v(x))f(x) + (v(x)f(x) + g(x)) \tag{6}$$

由式 (5)、式(6)及性质 3 得

$$(f(x), g(x)) = (f(x) + u(x)g(x), \mathrm{g}(x)) = (f(x), v(x)f(x) + g(x)) \tag{7}$$

由式 (7)再结合性质 2 得

$$\begin{aligned}(f(x), g(x)) &= (f(x) + g(x), g(x)) = (f(x) + g(x), -2g(x)) \\ &= (f(x) + g(x), f(x) - g(x))\end{aligned}$$

性质 4 $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$, 其中 $h(x)$ 为首 1 多项式。

（三）最大公因式的求法

（1）利用最大公因式的**定义**及性质求多项式的最大公因式，此方法适用于在理论上证明某个多项式是某两个多项式的最大公因式。

（2）对于给定具体系数的两个多项式，一般利用**辗转相除法**求最大公因式。

（四）多项式的互素

1. 多项式互素的定义

设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素**。

2. 多项式互素的判定方法

方法 1 定义法。

方法 2 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素当且仅当存在 $u(x), v(x) \in P[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

方法 3 在复数域上, 两个非零多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ **无公共根**当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素。

方法 4 反证法。

3. 多项式互素的性质

性质 1 $(f(x), g(x))=1$ 且 $(h(x), g(x))=1$ 当且仅当 $(f(x)h(x), g(x))=1$ 。

性质 2 若 $(f(x), g(x))=1$, 则 $(f^m(x), g^m(x))=1$, 且 $(f\left(x^m\right), g\left(x^m\right))=1$ 。

性质 3 $(f(x), g(x))=1$ 当且仅当 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$ 。

性质 4 若 $f(x) \mid g(x)h(x)$ 且 $(f(x), g(x))=1$, 则 $f(x) \mid h(x)$ 。

性质 5 若 $f(x)|g(x), h(x)|g(x)$ 且 $(f(x), h(x))=1$, 则 $f(x)h(x) \mid g(x)$ 。

内容概要

（一）不可约多项式

1. 不可约多项式的定义

数域 P 上次数大于等于 1 的多项式 $p(x)$ 称为数域 P 上的**不可约多项式**, 如果它不能表示成数域 P 上两个次数比 $p(x)$ 的次数低的多项式的乘积。

注:

(1) 数域 P 上的一次多项式都是数域 P 上的不可约多项式。

(2) 不可约多项式与所考虑的数域有关, 例如 x^2-3 在有理数域上不可约, 但在实数域上可约。

2. 不可约多项式的性质

设 $p(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式。

性质 1 $cp(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式, 其中 $c \neq 0, c \in P$ 。

性质 2 对数域 P 上的任一多项式 $f(x)$ ，必有 $(p(x), f(x)) = 1$ 或者 $p(x) \mid f(x)$ 。

性质 3 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 若 $p(x) \mid f(x)g(x)$, 则必有 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$ 。

性质 4 若 $p(x) \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)(s \geqslant 2)$, 则 $p(x)$ 至少可整除这些多项式中的一个。

1. 重因式的定义

设 $f(x) \in P[x], p(x) \in P[x]$ 是**不可约多项式**, k 为非负整数, 若 $p^k(x) \mid f(x)$, 且 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$, 则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k **重因式**。$k=1$ 时, 称 $p(x)$ 为**单因式**; $k>1$ 时, 称 $p(x)$ 为**重因式**; $k=0$ 时, $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式。

注：因为重因式本身一定是不可约因式, 所以 $f(x)$ 的重因式也和 $f(x)$ 所在的数域有关。

设 $p(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式。

性质 1 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式, 则它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。特别地, $f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式。

性质 2 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant 1)$ 重因式当且仅当它是 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式。

性质 3 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式, 即 $p(x) \mid (f(x), f'(x))$ 。

性质 4 多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $(f(x), f'(x)) = 1$ 。

性质 5 设 $f(x)$ 是数域 P 上次数大于等于 1 的多项式, 则 $h(x) = \frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 是一个没有重因式的多项式，但它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约多项式。即设

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x) \tag{8}$$

式 (8)中的 $s, r_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 都是正整数, $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_s(x)$ 是数域 P 上互不相同的首 1 不可约多项式，a 是 $f(x)$ 的首项系数，则

$$h(x) = \frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) \tag{9}$$

（三）多项式函数

1. 相关概念

1) 多项式函数的定义

设数 $\alpha \in P$, 而

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x] \tag{10}$$

称式(10)里 $f(x)$ 表示式中的 x 用 α 代替得到 P 中的数

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 \tag{11}$$

称式(11)中的数为当 $x = \alpha$ 时 $f(x)$ 的值, 记为

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 \tag{12}$$

于是, 对每个数 $\alpha \in P$, 由多项式 $f(x)$ 确定数域 P 中唯一的数 $f(\alpha)$ 与之对应, 因此由 $P[x]$ 中的多项式 $f(x)$ 定义了一个 P 到 P 的映射:

$$\alpha \mapsto f(\alpha), \forall \alpha \in P \tag{13}$$

称映射式(13)为由 $P[x]$ 中的多项式 $f(x)$ 定义的数域 P 上的一个**多项式函数**, 将其仍用 $f(x)$ 表示。

2) 多项式函数相等

设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义的数域 P 上的多项式函数相等指的是对任意的 $\alpha \in P$, 有 $f(\alpha) = g(\alpha)$ 成立。

3) 多项式的根

设 $f(x) \in P[x]$, 数 $\alpha \in P$ 。若 $f(\alpha) = 0$, 则称 α 为 $f(x)$ 的一个**根**或者**零点**。若 $x - \alpha$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, 则称 α 为 $f(x)$ 的 k **重根**; 当 $k = 1$ 时, 称 α 为 $f(x)$ 的**单根**; 当 $k > 1$ 时, 称 α 为 $f(x)$ 的**重根**。

4) 拉格朗日插值多项式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数域 P 中 n 个不同的数, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是数域 P 中 n 个不全为零的数, 则存在唯一的一个次数小于 n 的多项式 $L(x) \in P[x]$, 使得

$$L\left(a_i\right)=b_i, i=1,2, \cdots, n \tag{14}$$

若令 $l_i(x)=\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}(i=1, \cdots, n)$, 则有

$$L(x)=\sum_{i=1}^n b_i l_i(x) \tag{15}$$

称式(15) 中的多项式 $L(x)$ 为**拉格朗日插值多项式** (或插值多项式)。显然 $L(x)$ 是满足条件式(14)的次数最低的多项式。

2. 相关结论

(1) **余数定理**: 设 $f(x) \in P[x], \alpha \in P$, 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除 $f(x)$ 所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$ 。

(2) **因式定理**: 设 $f(x) \in P[x], \alpha \in P$, 则 $x-\alpha \mid f(x)$ 的**充分必要条件**是 $f(\alpha)=0$ 。

(3) **$P[x]$ 中 $n(\geqslant 0)$ 次多项式在数域 P 中的根不可能多于 n 个 (重根按重数计算)**。

(4) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 且 $f(x), g(x)$ 的次数都不超过 n, 若对于数域 P 中 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 有 $f\left(\alpha_i\right)=g\left(\alpha_i\right)(i=1,2, \cdots, n+1)$ 成立, 则 $f(x)=g(x)$ 。

(5) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 则 $f(x)=g(x)$ 当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义的数域 P 上的多项式函数相等, 即 $f(x)=g(x)$ 当且仅当对任意 $\alpha \in P$, 有 $f(\alpha)=g(\alpha)$ 成立。

（四）复数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 复数域上多项式的因式分解定理

复系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式在复数域上都可唯一地分解成一次因式的乘积。换句话说，复数域上任一次数大于 1 的多项式都是可约的。

2. 复数域上多项式的标准分解式

复系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=a_n\left(x-\alpha_1\right)^{r_1}\left(x-\alpha_2\right)^{r_2}\cdots\left(x-\alpha_s\right)^{r_s} \tag{16}$$

式(16)中的 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是不同的复数，$r_1,r_2,\cdots,r_s$ 是正整数且 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$ 。

3. 代数基本定理

每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中至少有一根。n 次复系数多项式在复数域中恰有 n 个复根 (重根按重数计算)。

（五）实数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 实系数多项式的因式分解定理

实系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式在实数域上都可唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积。 换句话说，实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上不可约的充分必要条件是 $\partial(f(x))=1$ 或 $f(x)=ax^2+bx+c$ 且 $b^2-4ac<0$ 。

2. 实系数多项式的标准分解式

实系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有标准分解式

$$f(x)=a_n\left(x-\alpha_1\right)^{l_1}\left(x-\alpha_2\right)^{l_2}\cdots\left(x-\alpha_s\right)^{l_s}\cdots \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_1}\cdots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{k_t} \tag{17}$$

式(17)中的 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是互异实数。$p_i,q_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是互异实数对，且满足 $p_i^2-4q_i<0(i=1,2,\cdots,t)$ $l_1,l_2,\cdots,l_s,k_1,k_2,\cdots,k_t$ 都是正整数，使得 $l_1+l_2+\cdots+l_s+2k_1+2k_2+\cdots+2k_t=n$ 。

3. 实系数多项式的根

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{C}[x]$, $\quad \bar{a}_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 为 a_i 的**共轭复数**, 记

$$\overline{f(x)} = \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \bar{a}_0$$

于是, 当 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{R}[x]$ 时, 有 $\overline{f(x)} = f(x)$, 因此, 若 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的一个非实的复数根, 则它的共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根, 再由实系数多项式因式分解定理知 α 与 $\bar{\alpha}$ 有同一重数。

即**实系数多项式的虚根成对出现**。于是若实系数多项式 $f(x)$ 的次数为大于 0 的奇数, 则 $f(x)$ 必有实根。

1. 本原多项式

(1) **本原多项式**的定义: 若一个非零的整系数多项式 $f(x)$ 的系数互素, 则称 $f(x)$ 是一个本原多项式。

(2) 相关性质。

性质 1 设 $f(x)$ 是任一非零有理系数多项式, 则存在有理数 r 及本原多项式 $h(x)$, 使 $f(x) = rh(x)$, 且这种表示法除了差一个正负号外是唯一的。即若

$$f(x) = rh(x) = sg(x) \tag{18}$$

式(18)中的 $h(x), g(x)$ 都是本原多项式, $r, s \in \mathbf{Q}$, 则必有 $r = \pm s, h(x) = \pm g(x)$ 。

性质 2 (**高斯引理**) 两个本原多项式的乘积还是本原多项式。

性质 3 若一个次数大于 1 的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积。即整系数多项式在有理数域上可约当且仅当它在整数环上可约。

性质 4 设 $f(x)$ 是整系数多项式，$g(x)$ 为本原多项式，若 $f(x) = g(x)h(x)$，$h(x)$ 是有理系数多项式，则 $h(x)$ 一定是整系数多项式。

性质 5 **设 $f(x)$ 是整系数多项式，$\alpha = \frac{r}{s}$ (r 和 $s \neq 0$ 是互素的整数) 是它的一个有理根，那么 $f(x) = \left(x - \frac{r}{s}\right) u(x)$，$u(x)$ 是整系数多项式。**

2. 艾森斯坦判别法

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个**整系数多项式**，若存在**素数** p，使 $p \mid a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1); p \nmid a_n; \quad p^2 \nmid a_0$，则 $f(x)$ 在**有理数域**上不可约。

注：**艾森斯坦判别条件仅是判别一个整系数多项式在有理数域上不可约的充分条件。**

3. 有理根的判定

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个**整系数多项式**, 而 $\alpha=\frac{r}{s}$ （r 和 $s\neq 0$ 是互素的整数）是它的一个**有理根**, 则

(1) 必有 $s\,|a_n, r|\,a_0$ 。

特别地, 若 $f(x)$ 的首项系数 $a_n=1$, 则 $f(x)$ 的有理根都是整数根, 而且都是 a_0 的因子。

(2) 如果 $f(1)\neq 0, f(-1)\neq 0, \alpha\neq\pm 1$, 那么由性质 5 知必有 $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ 与 $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ 都是整数, 于是若 $\frac{f(1)}{1-\alpha}$ 与 $\frac{f(-1)}{1+\alpha}$ 中有一个不是整数, 则 $\alpha=\frac{r}{s}$ 一定不是 $f(x)$ 的根。

内容概要

例 1.1 (杭州师范大学, 2011 年) 设 $f(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实系数多项式且 $x^3 f^2(x) = x^2 g^4(x) + x^4 h^6(x)$, 求证: $f(x) = g(x) = h(x) = 0$ 。

证明：先证 $g(x)$ 和 $h(x)$ 全为零多项式。假设 $g(x)$ 和 $h(x)$ 不全为零多项式。

情形 1 如果 $g(x), h(x)$ 中之一为零多项式, 比较 $x^3 f^2(x) = x^2 g^4(x) + x^4 h^6(x)$ 两边的多项式的次数得奇数 = 偶数, 矛盾。因此假设不成立。

情形 2 如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 均不为零多项式, 由于 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是实系数多项式, 而 $x^2 g^4(x)$ 与 $x^4 h^6(x)$ 的首项系数都大于零, 知 $x^2 g^4(x) + x^4 h^6(x) \neq 0$ 。由 $x^3 f^2(x) = x^2 g^4(x) + x^4 h^6(x)$, 所以 $x^3 f^2(x) \neq 0$, 由此推导出 $f(x) \neq 0$, 比较 $x^3 f^2(x) = x^2 g^4(x) + x^4 h^6(x)$ 两边的多项式的次数得奇数 $=$ 偶数, 矛盾。

综上分析得出 $g(x) = h(x) = 0$, 从而 $f(x) = 0$ 。

内容概要

知识点 2：带余除法

例 1.2 求一个次数最低的实系数多项式 $f(x)$, 使其被 x^2+1 除余式为 $x+1$, 被 x^3+x^2+1 除余式为 x^2-1 。

解: 由已知条件可知, 存在 $g(x), h(x) \in \mathbf{R}[x]$ 。使得

$$f(x)=\left(x^2+1\right) g(x)+(x+1)=\left(x^3+x^2+1\right) h(x)+\left(x^2-1\right) \tag{19}$$

由式(19)知 $f(x)$ 的次数 $\geqslant 2$ 。

为了使 $f(x)$ 次数最低, 令式(19)中的 $h(x)=ax+b \in \mathbf{R}[x]$, 并将 $x=\mathrm{i}$ 代入式(19)中, 得 $-(a-3)+\mathrm{i}(b+1)=0$, 推出 $a=3, b=-1$ 。于是

$$f(x)=\left(x^3+x^2+1\right)(3x-1)+\left(x^2-1\right)=3x^4+2x^3+3x-2$$

内容概要

例 1.3 设 $g_1(x)g_2(x) \mid f_1(x)f_2(x)$ 。

(1) 证明：若 $f_1(x) \mid g_1(x)$, 且 $f_1(x) \neq 0$, 则必有 $g_2(x) \mid f_2(x)$ 。

(2) 若 $g_1(x) \mid f_1(x)$, 是否 $g_2(x) \mid f_2(x)$?

(1) **证明:** 因为 $g_1(x)g_2(x) \mid f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x) \mid g_1(x)$, 故存在多项式 $h(x), h_1(x)$, 使得

$$f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x)h(x), \quad g_1(x) = f_1(x)h_1(x)$$

于是有

$$f_1(x)f_2(x) = f_1(x)h_1(x)g_2(x)h(x)$$

由 $f_1(x) \neq 0$, 得 $f_2(x) = g_2(x)h(x)h_1(x)$ 。故 $g_2(x) \mid f_2(x)$ 。

(2) **解**: 不一定。例如:

$$g_1(x) = x - 2, \quad g_2(x) = x^2 - 1,$$

$$f_1(x) = (x-1)(x-2), \quad f_2(x) = (x+1)(x+2)$$

虽然 $g_1(x)g_2(x) = (x-2)\left(x^2-1\right)$ 整除 $f_1(x)f_2(x) = \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)$, 且 $g_1(x) \mid f_1(x)$, 但 $g_2(x) \nmid f_2(x)$ 。

内容概要

例 1.4 已知 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$, 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式。

解: 利用辗转相除法。

$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	x^3+x^2-x-1 $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$ $x^4+x^3-x^2-x$	x
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$ $-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$-2x^2-3x-1$ $-2x^2-2x$	$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$
	$-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$	$x-1$ $x-1$	
		0	

用等式表示为

$$
\begin{aligned}
f(x) &= xg(x) + \left(-2x^2-3x-1\right) \\
g(x) &= \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\left(-2x^2-3x-1\right) + \left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right) \\
-2x^2-3x-1 &= \left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)+0
\end{aligned}
$$

则 $(f(x),g(x))=x+1$ 。

注: 在用辗转相除法求两个具体多项式的最大公因式时, 为了避免出现分数, 可以将被除式或除式乘上适当的非零数以简化计算, 其理论依据见最大公因式的性质 2 和性质 3 。但是如果想将最大公因式表示成两个多项式的组合, 那么只能像例 1.4 那样做。

例 1.5 (上海大学, 2004 年) $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式。假设 x^4+x^2+1 整除 $f_1\left(x^3\right)+x^4 f_2\left(x^3\right)$ 。试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式。

解: 由题设知

$$f_1\left(x^3\right)+x^4 f_2\left(x^3\right)=h(x)\left(x^4+x^2+1\right) \tag{20}$$

又

$$\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)=x^6-1=\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right) \tag{21}$$

$$x^4+x^2+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right) \tag{22}$$

由式 (21)与式 (22)知 x^2+x+1 的两个根 $\omega_1=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \omega_2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ （它们都是 1 的立方根）与 x^2-x+1 的两个根 $\omega_3=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 和 $\omega_4=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ (它们都是 -1 的立方根) 都是 x^4+x^2+1 的根, 因此 x^4+x^2+1 的 4 个根是 1 和 -1 的非实数的立方根。

于是, 取 1 的两个非实数立方根 ω_1 和 ω_2 分别代入式(20)得

$$\begin{cases} f_1(1) + \omega_1 f_2(1) = 0 \\ f_1(1) + \omega_2 f_2(1) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

解线性方程组 (23)得 $f_1(1) = f_2(1) = 0$, 即 $x - 1$ 是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的一个公因式。

同理, 取 -1 的两个非实数立方根 ω_3 和 ω_4 分别代入式(20)得 $f_1(-1) = f_2(-1) = 0$, 即 $x + 1$ 是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的一个公因式。知 $(x+1)(x-1)$ 是 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的一个公因式。由于 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式, 所以

$$(f_1(x), f_2(x)) = (x+1)(x-1)$$

内容概要

例 1.6 （杭州师范大学, 2013 年）已知 $f(x), g(x) \in P[x]$ 且 $(f(x), g(x)) = 1$ 。证明: $(f(x) - g(x), f(x) + 2g(x)) = 1$ 。

证明: 由式(7)得

$$(f(x) - g(x), f(x) + 2g(x)) = (f(x) - g(x), 3g(x))$$

再由最大公因式的性质 2、式(7)和题设得

$$(f(x) - g(x), 3g(x)) = (3f(x), 3g(x)) = (f(x), g(x)) = 1$$

例 1.7 (陕西师范大学, 2008 年) 设 $f(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 是多项式, 证明: 如果 $(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1$, 那么 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ 。

证明: 由题设知存在 $u_1(x), v_1(x), u_2(x)$ 和 $v_2(x)$, 使得

$$f(x)u_1(x) + g(x)v_1(x) = 1 \tag{24}$$

$$f(x)u_2(x) + h(x)v_2(x) = 1 \tag{25}$$

将式(24)与式(25)相乘得

$$\begin{aligned} f^2(x)u_1(x)u_2(x) + f(x)u_1(x)h(x)v_2(x) + f(x)g(x)u_2(x)v_1(x) \\ + g(x)h(x)v_1(x)v_2(x) = 1 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} f(x)\left(f(x)u_1(x)u_2(x) + u_1(x)h(x)v_2(x) + g(x)u_2(x)v_1(x)\right) \\ + g(x)h(x)\left(v_1(x)v_2(x)\right) = 1 \end{aligned}$$

因此 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$ 。

内容概要

知识点 6: 因式分解唯一性定理与标准分解式

例 1.8 证明: 次数 > 0 且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件是对任意多项式 $g(x)$ 必有 $(f(x), g(x)) = 1$ 或者存在一个正整数 m, 使得 $f(x) \mid g^m(x)$ 。

证明:

必要性: 设 $f(x) = p^k(x)$, 其中 $p(x)$ 是不可约多项式, k 是正整数, 则对任意多项式 $g(x)$, 有

$$(p(x), g(x)) = 1 \text{ 或者} p(x) \mid g(x)$$

故

$$\left(p^k(x), g(x)\right) = 1 \text{ 或者} p^k(x) \mid g^k(x)$$

从而 $(f(x), g(x)) = 1$ 或者存在正整数 $m = k$, 使得 $f(x) \mid g^m(x)$ 。

充分性：设 $f(x)$ 的标准分解式为

$$f(x) = p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_t^{r_t}(x) \tag{26}$$

式(26)中的 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_t(x)$ 是互异的首项系数为 1 的不可约多项式。若式 (26)中的 $t > 1$, 取 $g(x) = p_1^{r_1}(x)$, 则

$$(f(x), g(x)) = p_1^{r_1}(x) \neq 1$$

而 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_t(x)$ 是互异的不可约多项式, 由因式分解及唯一性定理知, 对任何正整数 m, $f(x) \nmid g^m(x)$, 此为矛盾。故 $t = 1$, 即 $f(x) = p_1^{r_1}(x)$ 。结论成立。

例 1.9 (浙江大学, 2008 年; 华南理工大学, 2006 年) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 P 上的两个一元多项式, k 为给定的正整数。求证: $f(x) \mid g(x)$ 的充分必要条件是 $f^k(x) \mid g^k(x)$ 。

证明: 若 $g(x)=0$, 则命题成立。

若 $g(x) \neq 0$, 则 $f(x) \neq 0$ 。此时, 设

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)\cdots p_t^{r_t}(x), \qquad g(x)=bp_1^{s_1}(x)\cdots p_t^{s_t}(x) \tag{27}$$

式(27)中的 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_t(x)$ 是数域 P 上互异的首项系数为 1 的不可约多项式, $a \neq 0, b \neq 0$ 分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首项系数, $r_i, s_i (i=1,2,\cdots,t)$ 为非负整数。则

$$f^k(x)=a^k p_1^{kn}(x)\cdots p_t^{k_n}(x), \quad g^k(x)=b^k p_1^{kk_1}(x)\cdots p_t^{ks_t}(x)$$

于是

$$f(x)\,\big|g(x) \Leftrightarrow s_i \geqslant r_i \Leftrightarrow ks_i \geqslant kr_i \Leftrightarrow f^k(x)\big|\,g^k(x) \tag{28}$$

式(28)中的 “$\Leftrightarrow$” 表示 “当且仅当”。

内容概要

例 1.10 (中国科学院, 2005 年) 求一个 7 次多项式 $f(x)$, 使得 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除, $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除。

解: 由 $(x-1)^4 \mid f(x)+1$, 知 1 至少是 $f(x)+1$ 的 4 重根, 于是 1 至少是 $f'(x)$ 的 3 重根, 因此 $(x-1)^3 \mid f'(x)$ 。同理 $(x+1)^3 \mid f'(x)$ 。

由于 $\left((x-1)^3,(x+1)^3\right)=1$, 因此 $(x-1)^3(x+1)^3 \mid f'(x)$ 。而 $f'(x)$ 是 6 次多项式, 所以设

$$f'(x)=a(x-1)^3(x+1)^3=a\left(x^6-3x^4+3x^2-1\right) \tag{29}$$

对式(29)中的 $f'(x)$ 积分得

$$f(x)=\frac{a}{7}x^7-\frac{3a}{5}x^5+ax^3-ax+b \tag{30}$$

由 $(x-1)^4 \mid f(x)+1, (x+1)^4 \mid f(x)-1$, 得

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)+1=0 \\ f(-1)-1=0 \end{array}\right. \tag{31}$$

由式(30)与式 (31)得 $a=\frac{35}{16}, b=0$ 。因此

$$f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x$$

例 1.11 求多项式 $f(x)=x^4-5x^3+11x^2-16x+12$ 的有理根。

解: 第一步求有理根的范围。

$f(x)$ 为首项系数为 1 的整系数多项式, 故它的有理根都是整根, 且都是常数项的因子。常数项 12 的因子为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$, 所以 $f(x)$ 的有理根只可能是:
$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$ 。

第二步缩小有理根范围。

因 $f(1)=3, f(-1)=45$, 所以 1 与 -1 都不是 $f(x)$ 的有理根。

又若 $a\neq\pm1$ 为 $f(x)$ 的有理根, 则 $\frac{f(1)}{1-a}$ 与 $\frac{f(-1)}{1+a}$ 都是整数。将 12 的因子 a 代入 $\frac{f(1)}{1-a}$ 与 $\frac{f(-1)}{1+a}$ 逐个计算, 可知仅当 $a=2,-2,4$ 时 $\frac{f(1)}{1-a}$ 与 $\frac{f(-1)}{1+a}$ 都是整数, 所以 $f(x)$ 的有理根只可能是 $2,-2,4$ 。

第三步应用综合除法对 $a=2,-2,4$ 进行验证。

检验 $a=2$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -5 & 11 & -16 & 12 \\
 & & 2 & -6 & 10 & -12 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 5 & -6 & 0 \\
 & & 2 & -2 & 6 & \\
\hline
2 & 1 & -1 & 3 & 0 & \\
 & & 2 & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 5\neq 0 & &
\end{array}
$$

检验 $a=-2$

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & 1 & -1 & 3 \\
 & & -2 & 6 \\
\hline
 & 1 & -3 & 9\neq 0
\end{array}
$$

检验 $a=4$

$$\begin{array}{r|rrr} 4 & 1 & -1 & 3 \\ & & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & 15 \neq 0 \end{array}$$

因此 $f(x)$ 的有理根为 2 (二重)。

注:

(1) 如果 $f(1)=0, f(-1)=0$ ，那么对第一步得到的有理根的范围直接执行第三步。

(2) 如果由综合除法验证出 a 是 $f(x)$ 的根, 那么要接着用综合除法得到其重数, 如上面的数 2 , 再者, 知道 a 的重数之后（假设 a 的重数为 k), 再验证有理根范围中其他数是否为 $f(x)$ 的根, 要用 $(x-a)^k$ 除 $f(x)$ 的商来验证, 而不是用 $f(x)$ 来验证, 如上面第三步中先得到数 2 是 $f(x)$ 的 2 重根, 且 $f(x)=x^4-5x^3+11x^2-16x+12=(x-2)^2\left(x^2-x+3\right)$, 再验证 $-2,4$ 是否为 $f(x)$ 的根时, 要用 $(x-2)^2$ 除 $f(x)$ 的商 x^2-x+3 来验证, 原因是 $x+2$ 与 $x-4$ 都与 $(x-2)^2$ 互素, 因此 $-2,4$ 是 $f(x)$ 的根当且仅当它们是 x^2-x+3 的根。

例 1.12 求多项式 $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$ 的标准分解式。

解: 方法 1 分离重因式法。

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 - 40x - 15$$

用辗转相除法, 可求得

$$(f(x), f'(x)) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

因此, $f(x)$ 的不可约因式为 $x-4$ 和 $x+1$ 。分别用 $x-4$ 和 $x+1$ 去除 $(f(x), f'(x)) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, 知 $x-4$ 和 $x+1$ 在 $(f(x), f'(x))$ 中的重数分别为 0 和 3 。于是 $x-4$ 和 $x+1$ 在 $f(x)$ 中的重数分别为 1 和 4。故 $f(x)$ 的标准分解式为

$$f(x) = (x-4)(x+1)^4$$

方法 2 求 $f(x)$ 的有理根 (略)。

例 1.13 证明对任意非负整数 n, 均有 $x^2+x+1 \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$ 。

证明: 记 $f(x)=x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$, 只需证明 x^2+x+1 的根都是 $f(x)$ 的根。

事实上, x^2+x+1 的任一根 α 满足 $\alpha^2+\alpha+1=0$ 及 $\alpha^3=1$, 从而

$$f(\alpha)=\alpha^{n+2}+(\alpha+1)^{2n+1}=\alpha^{n+2}+\left(-\alpha^2\right)^{2n+1}=\alpha^{n+2}+\left(-\alpha^2\right)^{2n}\left(-\alpha^2\right)$$

即 $f(\alpha)=\alpha^{n+2}+\left(\alpha^4\right)^n\left(-\alpha^2\right)=\alpha^{n+2}-\alpha^{n+2}=0$, 结论得证。

例 1.14 (1) 求一个次数小于 4 的多项式 $L(x)$, 使 $L(2)=3, L(3)=-1, L(4)=0, L(5)=2$。

(2) 求一个二次多项式 $L(x)$, 使得它在 $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值。

(3) 求一个次数尽可能低的多项式 $L(x)$, 使 $L(0)=1, L(1)=2, L(2)=5, L(3)=10$ 。

解: 用拉格朗日插值多项式。

(1) $n=4$, $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$, $a_4=5$, $b_1=3$, $b_2=-1$, $b_3=0$, $b_4=2$, 得

$$\begin{aligned} L(x) =& \frac{3(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} - \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)} \\ &+ \frac{2(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} \\ =& -\frac{2}{3}x^3 + \frac{17}{2}x^2 - \frac{203}{6}x + 42 \end{aligned}$$

(2) $n=3, a_1=0, a_2=\frac{\pi}{2}, a_3=\pi\ b_1=\sin 0=0, b_2=\sin\frac{\pi}{2}=1, b_3=\sin\pi=0$, 于是

$$L(x)=\frac{(x-0)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}=-\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)$$

(3) $n=4$, $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=5$, $b_4=10$, 因此

$$L(x)=x^2+1$$

例 1.15 (重庆大学, 2010 年) 求一个一元多项式, 使它的各根分别等于

$$f(x) = 5x^4 - 6x^3 + x^2 + 4$$

的各根减 1。

解: 令 $y = x - 1$, 即 $x = y + 1$, 则

$$f(x) = 5(y+1)^4 - 6(y+1)^3 + (y+1)^2 + 4 = 5y^4 + 14y^3 + 13y^2 + 4y + 4 = g(y)$$

故多项式 $g(y)$ 为所求。

注：上述变换可称为根的平移。

例 1.16 求一个一元多项式, 使它的各根分别等于

$$f(x) = 15x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 21x + 13$$

的根的倒数。

解: 由于 0 不是 $f(x)$ 的根, 令 $y = \frac{1}{x}$, 即 $x = \frac{1}{y}$, 于是

$$\begin{aligned} y^4 f(x) &= y^4\left(15\left(\frac{1}{y}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{y}\right)^3 + 11\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 21\left(\frac{1}{y}\right) + 13\right) \\ &= 13y^4 - 21y^3 + 11y^2 - 2y + 15 \\ &= g(y) \end{aligned}$$

故多项式 $g(y)$ 为所求。

注: 上述变换可称为倒根的变换, 倒根变换将原多项式的系数全部颠倒顺序。

例 1.17 求一个一元多项式, 使它的各根分别等于

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 5$$

的根的 2 倍。

解: 令 $y = 2x$, 即 $x = \frac{y}{2}$, 则

$$\begin{aligned} 2^5 f(x) &= 2^5 \left(\left(\frac{y}{2}\right)^5 - 4\left(\frac{y}{2}\right)^4 + \left(\frac{y}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{2}\right) - 5 \right) \\ &= y^5 - 8y^4 + 4y^3 + 24y^2 + 32y - 160 = g(y) \end{aligned}$$

故多项式 $g(y)$ 为所求。

注: 上述变换可称为位根的变换。

内容概要

例 1.18 判别多项式 $f(x)=x^3+3x+1$ 在有理数域上是否可约。

解: 因 $\partial(f(x))=3$, 若 $f(x)$ 在有理数域上可约, 则 $f(x)$ 在有理数域上必有一次因式, 从而 $f(x)$ 必有有理根。因 $f(x)$ 的常数项为 1, 首项系数也是 1, 故 $f(x)$ 的有理根 (如有的话) 只可能为 $x=\pm 1$ 。

但 $f(1)=5\neq 0, f(-1)=-1\neq 0$, 所以 $f(x)$ 无有理根，从而 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

例 1.19 设 $f(x)=x^{n+1}+x^n-2(n\geqslant 1)$, 求 $f(x)$ 在有理数域上的不可约因式, 并说明理由。

解: $f(x)=x^{n+1}+x^n-2=x^{n+1}-1+x^n-1=(x-1)\left(x^n+2x^{n-1}+\cdots+2x+2\right)$, 令

$$g(x)=x^n+2x^{n-1}+\cdots+2x+2$$

取素数 $p=2$, 由艾森斯坦判别法可知, $g(x)$ 在有理数域上不可约。从而 $f(x)$ 在有理数域上的不可约因式是 $x-1$ 和 $x^n+2x^{n-1}+\cdots+2x+2$ 。

例 1.20 (四川大学, 2008 年) 设 n 是大于 1 的整数, 问 $\sqrt[n]{2008}$ 是否为无理数? 说明理由。

解: 令 $f(x)=x^n-2008$, 取素数 $p=251$, 则 $p\nmid 1, p|0, p|-2008, p^2\nmid -2008$ 。由艾森斯坦判别法知 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约, 故其根 $\sqrt[n]{2008}$ 是无理数。