高等代数选讲
Selection of Advanced Algebra

第三讲：线性方程组
Lecture 3: Systems of Linear Equations

主讲教师：艾武

数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics
桂林理工大学
Guilin University of Technology

内容概要

内容概要

含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, m$ 个方程的线性方程组一般有如下几种表示形式。

（1）一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

若 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零, 则称式(1)为**非齐次线性方程组**。矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

和

$$
\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)
$$

分别称为非齐次线性方程组 (1) 的**系数矩阵**和**增广矩阵**。

若线性方程组 (1) 中的 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, 即

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}
$$

则称式 (2) 为**齐次线性方程组**, 并称式 (2) 为式 (1) 的**导出组**。

（2）**矩阵形式**：设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$, 那么

- 非齐次线性方程组的矩阵形式为
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$
- 齐次线性方程组的矩阵形式为
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

（3）**向量形式**：若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则

- 非齐次线性方程组可写为
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$$
- 齐次线性方程组可写为
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

内容概要

（一）阶梯形矩阵的定义

一个 $m \times n$ 矩阵, 如果它的**任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在的下方（如果有的话）全为零**, 如该行全为零, 则它下面的行（如果存在）也全为零, 那么该矩阵就称为一个**阶梯形矩阵**。

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2j_2} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{j_r} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} \tag{3}$$

式 (3) 中 $b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{j_r} \neq 0, 1 \leqslant r \leqslant \min(m, n), 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$ 。

注：(1) **零矩阵是阶梯形矩阵**。(2) **阶梯形矩阵可能没有全零行**（元素全为零的行)。

（二）最简阶梯形矩阵的定义

最简阶梯形矩阵是阶梯形矩阵, 并且它的各个非零行（元素不全为零的行）第一个非零元素都是 1 , 且这些元素所在列的其他元素全为零。最简阶梯形矩阵的一般形式为

$$
\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}_{m\times n} \tag{4}
$$

式 (4) 中, $1\leqslant r\leqslant \min(m,n), 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n$ 。

注：**零矩阵是最简阶梯形矩阵**。

（三）化矩阵为阶梯形矩阵的方法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 的矩阵, 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 已是阶梯形矩阵。若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 对 $\boldsymbol{A}$ 施行下列步骤。

第一步：对所考虑的矩阵从左向右寻找第一个非零列（元素不全为零的列）。

第二步：在第一步找到的第一个非零列中挑选一个非零元素将其交换到该列第一个位置, 之后用它将该列它下面的非零元素全化为零。经上述两步后, $\boldsymbol{A}$ 化为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & b_{1j_1} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{O}$, 结束, $\boldsymbol{A}$ 已被化成阶梯形矩阵。

若 $\boldsymbol{A}_1\neq\boldsymbol{O}$, 对 $\boldsymbol{A}_1$ 施行上述两个步骤, 如此下去, 有限次后就将 $\boldsymbol{A}$ 化成阶梯形矩阵。

（四）化阶梯形矩阵为最简阶梯形矩阵的方法

第一步：从式 (3) 中 $\boldsymbol{B}$ 的最后一个非零行开始，一直到第二个非零行为止，用这些行的第一个非零元素将它们所在的列中其上面的非零元素全化为 0，即

$$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2j_2} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{yr} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

第二步：将第一步所得到的矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 的各个非零行的第一个非零元素用初等行变换都化为 1，即

$$\boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{J} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccccc} j_1 & j_2 & \cdots & & j_r & & & & & & & & & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} r \end{array}$$

内容概要

消元法解线性方程组

（1）消元法是求解线性方程组的具体方法，该方法实际上是反复对线性方程组施行如下三种初等变换:

- (1) **数乘**：用一个非零的数乘某一个方程。
- (2) **倍加**：把一个方程的倍数加到另一个方程。
- (3) **对换**：互换两个方程的位置。

（2）消元法解线性方程组的理论依据是线性方程组经初等变换得与其同解的线性方程组。

（3）使用消元法解线性方程组可以在线性方程组的增广矩阵上进行，即对增广矩阵施行初等行变换将其化为阶梯形矩阵，此时就可以判别方程组有解还是无解，在有解的情形，再将阶梯形矩阵化为最简阶梯形矩阵就可得到原方程组的解。

注意

（1）将求解线性方程组的消元法转化为对方程组的**增广矩阵施行初等行变换**, 将其化为**阶梯形矩阵**, 进而化为**最简阶梯形矩阵**。

这一过程不但简单明了（不用带着未知量进行运算）, 而且由于强调了元素和方程组的相对位置, 还可以清除计算混乱甚至循环推导这类错误。

（2）在解线性方程组时, 有时为了理论叙述的方便, 才允许**交换系数矩阵的列**, 这相当于**将未知量重新编号**, 而在解具体的方程组时, 如果要交换系数矩阵的列, 此时一定要将系数矩阵的各列标上相应的未知量, 这样在交换列时就可以知道各列对应的未知量; 而对于系数矩阵列的其他两种初等变换, 在解线性方程组时是绝对不允许使用的, 其原因是容易理解的。

消元法解非齐次线性方程组的步骤

设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

第一步：加减消元。

用矩阵的初等行变换将 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 化成阶梯形矩阵 $\bar{\boldsymbol{J}}_1$：

$$
\overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{J}}_1
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccccccccccccc:c}
0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & d_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2j_2} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & d_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{rj_r} & * & \cdots & * & d \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$\bar{J}_1$ 中 $b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{r_r} \neq 0, 1 \leqslant r \leqslant \min(m,n), 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$ 。

判别原非齐次线性方程组是否有解：如果 $\bar{J}_1$ 中的 $d_{r+1} \neq 0$, 即阶梯形矩阵 $\bar{J}_1$ 中最后一个非零行第一个非零元素是该行的最后一个元素, 那么原非齐次线性方程组无解, 结束; 如果 $\bar{J}_1$ 中的 $d_{r+1} = 0$ 或 $r = m$, 即阶梯形矩阵 $\bar{J}_1$ 中最后一个非零行第一个非零元素不是该行的最后一个元素, 那么原非齐次线性方程组有解, 转第二步。

第二步：代入消元。

将阶梯形矩阵 $\bar{J}_1$ 用矩阵的初等行变换化成最简阶梯形矩阵 $\bar{J}$：

$$\overline{\boldsymbol{J}}_1 \to \overline{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{J}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & d_1' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & d_2' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & d_r' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果最简阶梯形矩阵 $\bar{J}$ 的非零行的个数 $r = n$（n 为原非齐次线性方程组所含未知量的个数），那么原非齐次线性方程组有唯一解 $\begin{cases} x_1 = d_1' \\ x_2 = d_2' \\ \cdots\cdots \\ x_n = d_n' \end{cases}$。

如果最简阶梯形矩阵 $\bar{J}$ 的非零行的个数 $r < n$, 那么原非齐次线性方程组有无穷多个解, 将 $\bar{J}$ 中各个非零行第一个非零元素对应的未知量以外的未知量都称为自由未知量, 它们可以

任意取值, 将 $\overline{\boldsymbol{J}}$ 对应的非齐次线性方程组（即以 $\overline{\boldsymbol{J}}$ 为增广矩阵的非齐次线性方程组）里去掉 $\bar{J}$ 中的全零行对应的方程, 之后将剩下的方程中含自由未知量的项都移到方程的右侧（可以用 $\bar{J}$ 实现这个操作）, 就得到原非齐次线性方程组的一般解。为了便于叙述, 将自由未知量分别记为 $x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$, 它们对应的系数也相应记为

$$c_{i,j_{r+1}}, \cdots, c_{i,j_n} \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

那么原非齐次线性方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_{j_1} = d'_1 - c_{1,j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{1,j_n} x_{j_n} \\ x_{j_2} = d'_2 - c_{2,j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{2,j_n} x_{j_n} \\ \cdots\cdots \\ x_{j_r} = d'_r - c_{r,j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - c_{r,j_n} x_{j_n} \end{cases} \tag{5}$$

式 (5) 中 $x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$ 为自由未知量。

消元法解齐次线性方程组的步骤

设齐次线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$。

第一步： 用矩阵的初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化成最简阶梯形矩阵 J：

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

第二步：如果最简阶梯形矩阵 J 的非零行的个数 $r=n$ (n 为原文次线性方程组所含未知量的个数), 那么原齐次线性方程组有唯一零解

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \cdots\cdots \\ x_n=0 \end{cases}$$

如果最简阶梯形矩阵 J 的非零行的个数 $r<n$, 那么原齐次线性方程组有无穷多个解 (即有非零解), 其一般解为（自由未知量及相应的系数处理方法同非齐次线性方程组）

$$\begin{cases} x_{j_1}=-c_{1,j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-\cdots-c_{1,j_n}x_{j_n} \\ x_{j_2}=-c_{2,j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-\cdots-c_{2,j_n}x_{j_n} \\ \cdots\cdots \\ x_{j_r}=-c_{r,j_{r+1}}x_{j_{r+1}}-\cdots-c_{r,j_n}x_{j_n} \end{cases} \tag{6}$$

式 (6) 中 $x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n}$ 为自由未知量。

内容概要

（一）数域 P 上的 n 维向量的定义

由数域 P 中 n 个数组成的有序数组

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

称为数域 P 上的一个 n **维行（或列）向量**。称 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为向量 α 的第 i 个**分量**, 分量全为 0 的向量称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$ 。

注：若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 也记 $\boldsymbol{\alpha}'=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 即 n 维行（或列）向量可以看成是 $1\times n$ （或 $n\times 1$ ）矩阵。

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $\boldsymbol{\gamma}$ 都是数域 P 上的 n 维向量, $k,l\in P$, 规定:

（1）**相等**：$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 指的是 $a_i=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$;

（2）**加法**：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$;

（3）**数乘**：$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$;

（4）**负向量**：$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 。

（三）向量线性运算的运算规律及性质

1. 加法

（1） $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

（2） $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

（3） $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

（4） $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$ 。

2. 数乘

（1） $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$;

（2） $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

（3） $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

（4）$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$ 。

3. 加法与数乘

（1）$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

（2）$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$ 。

（四）数域 P 上的 n 维向量空间

以数域 P 中的数作为分量的 n **维向量的全体**, 同时考虑到定义在它们上面的**加法**和**数量乘法**, 称为数域 P 上的 n **维向量空间**, 记为 P^n 。

内容概要

1. 线性表出的定义

对于 P^n 中的向量 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 若存在 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in P$, 使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 成立, 则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的**线性组合**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性表出**。

2. 线性表出的判别

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 都是 P^n 中的向量, 它们对应的线性方程组为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\beta} \tag{7}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = b_n \end{cases} \tag{8}$$

（1）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出的充分必要条件是线性方程组(7)有解。

（2）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 唯一线性表出的充分必要条件是线性方程组(7)有唯一解。

（3）$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出的充分必要条件是线性方程组(7)无解。

3. n 维单位向量与 n 维零向量

（1）n **维单位向量:**

P^n 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 都是 P^n 中的向量组:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

的一个线性组合。这是因为

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

称向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为 P^n 中的**单位向量**。

（2）n **维零向量:**

P^n 中的零向量是 P^n 中任一向量组的线性组合（取系数全为 0 即可)。

1) 向量组等价的定义

若向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都可由向量组 (II): $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出。

若两个向量组可以互相线性表出, 则称这两个向量组**等价**。

2) 向量组等价的性质

性质 1 （反身性） 每个向量组都与它自身等价。

性质 2 （对称性） 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 也与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 等价。

性质 3 （传递性） 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 等价, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_p$ 等价, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_p$ 等价。

1. 线性相关与线性无关的定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为 P^n 中的一组向量, 若存在 P 中一组**不全为零的数** $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \tag{9}$$

成立, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**;

当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时, 式(9)成立, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**。

2. 向量组的秩与极大线性无关组

1) 向量组的极大线性无关组

（1）**定义**: 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中, 若一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 并且从向量组中剩下的向量里（如果还有的话）任意添一个向量, 所得的部分组都线性相关, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**极大线性无关组**。

（2）**相关结论**:

- (1) 含非零向量的向量组一定有极大线性无关组, 且其极大线性无关组有可能不唯一。
- (2) 线性无关向量组只有一个极大线性无关组就是它本身。
- (3) 向量组与它的任一个极大线性无关组等价。
- (4) 向量组的任意两个极大线性无关组等价。
- (5) 向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相同。

2) 向量组的秩

（1）**向量组秩的定义**: 向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个**向量组的秩**。全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组, 规定这样的向量组的秩为零。

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩记为 $r\left\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\right\}$ 。

（2）**相关结论**:

(1) 若向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出, 则向量组 (I) 的秩不大于向量组 (II) 的秩。

(2) 等价的向量组有相同的秩。

3. 线性相关与线性无关的判别

1）线性相关性与齐次线性方程组及行列式的关系

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$ 都是 P^n 中的向量, 它们对应的齐次线性方程组为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0} \tag{10}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \end{cases} \tag{11}$$

当 $m=n$ 时, 它们对应的行列式为

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{12}$$

（1）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**的充分必要条件是齐次线性方程组 (10) **有非零解**, 且当 $m = n$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充分必要条件是行列式(12)等于零, 即

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = 0$$

（2）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**的充分必要条件是齐次线性方程组 (10) **只有零解**, 且当 $m = n$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是行列式(12)不等于零, 即

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0$$

2）线性相关性与线性表出的关系

（1）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表出。

（2）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表出。

（3）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 且 $s>t$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关，简称**多的被少的线性表出，则多的一定线性相关**。

（4）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 且它可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 则 $s\leqslant t$ （这是（3）的逆否命题)。

（5）两个线性无关的等价的向量组, 必含有相同个数的向量。

3）其他判别方法

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是数域 P 上的一个 n 维向量组, 当它是行向量组时, 构造 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s \end{pmatrix}$, 当它是列向量组时, 构造 $n \times s$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 。

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关	$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关
当 $s=1$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1 = 0$	当 $s=1$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0$
当 $s=2$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的对应分量成比例	当 $s=2$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的对应分量不成比例
$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩小于 s	$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩等于 s
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 s	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 s
当 $s=n$ 时, 矩阵 A 的行列式 $\|A\|=0$	当 $s=n$ 时, 矩阵 A 的行列式 $\|A\| \neq 0$
当 $s>n$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关	
如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 有一个部分组线性相关, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 也线性相关, 简称部分相关, 则整体相关	如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 那么它的任一部分组都线性无关, 简称整体无关, 则部分无关
线性相关向量组减少对应位置分量后, 得到的向量组仍线性相关	线性无关向量组在对应位置增加分量后, 得到的向量组仍线性无关
	两两正交的非零向量组 (向量组中每个向量都不是零向量）线性无关
	矩阵的属于不同特征值的特征向量线性无关

内容概要

1. 矩阵的行向量组与列向量组

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 令

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) \\ \cdots, \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}) \end{gathered}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列向量组**。

2. 矩阵的子式

在一个 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行 k 列 $(1 \leqslant k \leqslant \min(s, n))$, 位于这些选定的行和列交叉点上的 k^2 个元素按原来的次序构成的 k 级行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k **级子式**, A 的 k 级子式共有 $C_s^k C_n^k$ 个。

1. 矩阵秩的定义

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的行（列）秩。可以证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩与列秩相等，统称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记为 $r(\boldsymbol{A})$ 。

2. 常用结论

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $m \times n$ 矩阵，则

（1）$r(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m, n)$ 。

（2）若 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 1$ 。

（3）$r(\boldsymbol{A})$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高级数。

（4）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r 的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 r 级子式不为零，而所有 $r+1$ 级子式（如果有的话）全为零。

（5）$r\left(\boldsymbol{A}'\right)=r(\boldsymbol{A})$ 。

（6）若 $k\neq 0$ ，则 $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$ 。

（7）矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。

（8）$r(\boldsymbol{A})=m$ （即 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵）的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $(\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{O})$; $r(\boldsymbol{A})=n$ （即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵）的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 。

（9）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$ 。

（10）当 $m=n$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为零的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 n。

（11）$r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ 。

注：利用以上结论可以方便地求出矩阵的秩, 特别是**可以用初等行变换将矩阵化为阶梯形矩阵, 这个阶梯形矩阵中非零行的个数就等于原矩阵的秩**。

（三）求向量组的秩与极大线性无关组的方法

直接利用定义来求向量组的秩和极大线性无关组不方便，可采用下列方法求之。

方法 1 将行（或列）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 排成矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_s \end{pmatrix} \text{或} \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$$

求出 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，即知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩也为 r 。

若 $r(\boldsymbol{A})=r$, 在 $\boldsymbol{A}$ 中求一个 r 级非零子式 D, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中包含 D 的 r 个行向量（当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{pmatrix}$ 时）或 r 个列向量（当 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 时）即为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组。

方法 2 将列（或行）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 排成矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\,(\text{ 或}A=(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s'))$$

用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{J}$, 若 $\boldsymbol{J}$ 中有 r 个非零行, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r; 设 J 中第 i 个非零行的第一个非零元素所在的列标号为 $j_i(i=1,2,\cdots,r)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组。

内容概要

（一）齐次线性方程组解的性质和判定

1. 解的性质

如果 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解, k 为任意数, 那么 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2, k\boldsymbol{\xi}_1$ 也都是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解。因此 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解的线性组合仍是它的解。

2. 解的判定

设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 含有 n 个未知量和 m 个方程, 即其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则

（1） $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件是

- $r(\boldsymbol{A})<n$;
- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关;
- 存在矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$; 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$;
- 当 $m=n$ 时, $|\boldsymbol{A}|=0$ 。

（2）$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解的充分必要条件是

- $r(\boldsymbol{A}) = n$;
- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关;
- 当 $m = n$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 。

设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是含有 n 个未知量和 m 个方程的非齐次线性方程组。

1. 解的性质

（1）若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解。

（2）若 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, $\boldsymbol{\xi}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解。

2. 有解的判定

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$, $\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n \mid \boldsymbol{b})$ 分别是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵与增广矩阵。

（1） $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是

- $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$, 即系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相同;
- $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出;
- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 等价;
- $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}\}$ 。

（2） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解的充分必要条件是

- $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$, 即 $r(\boldsymbol{A})+1=r(\overline{\boldsymbol{A}})$;
- $\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出。

（3） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是

- $r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})=n$;
- $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表出;
- 当 $m=n$ 时, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 。

（4） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件是

- $r(\boldsymbol{A})=r(\bar{\boldsymbol{A}})<n$;
- $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 但表示系数不唯一。

内容概要

设齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 含有 n 个未知量。

1. 基础解系的定义

设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解, 若

（1）$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关;

（2）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的任意一个解都可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性表出, 则称 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个**基础解系**。

2. 基础解系的性质和判定

（1）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有基础解系当且仅当且它有非零解。

（2）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有基础解系当且仅当且 $r(\boldsymbol{A})<n$ 。

（3）若 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有基础解系, 则它有无穷多个基础解系, 且这些基础解系彼此是等价的。

（4）若 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有基础解系, 则它的每个基础解系所含解的个数都为 $n-r(\boldsymbol{A})$, 即自由未知量的个数。

（5）设 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有基础解系, 则与 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系等价的任一线性无关向量组都是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系。

（6）设 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系。

3. 齐次线性方程组的通解

设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s (s = n - r(\boldsymbol{A}))$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的任意一个解都可由其线性表出。将

$$\boldsymbol{\eta} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\xi}_s \tag{13}$$

中的 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 为任意常数，称为**齐次线性方程组** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的**通解**（或**全部解**）

4. 齐次线性方程组的解空间

齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解的全体按向量的线性运算构成一个线性空间, 称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的**解空间**, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数为 $n - r(\boldsymbol{A})$ 。

设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 含有 n 个未知量, 且有无穷多解, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s(s=n-r(\boldsymbol{A}))$ 为其导出组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系， $\boldsymbol{\gamma}_0$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解。将

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s \tag{14}$$

中的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数，称为**非齐次线性方程组** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的**通解**（或**全部解**）。

内容概要

例 3.1 判断向量 $\boldsymbol{\beta}_1 = (4, 3, -1, 11)$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2 = (4, 3, 0, 11)$ 是否为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 5)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, -1, 1, 1)$ 的线性组合。若是，写出表达式。

解：**方法 1**：解线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_1$, 即对其增广矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2' \mid \boldsymbol{\beta}_1')$ 施行初等行变换得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2' : \boldsymbol{\beta}_1') = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

由最后一个矩阵知线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_1$ 有唯一解 $x_1 = 2, x_2 = 1$, 因此 $\boldsymbol{\beta}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 。

解线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_2$ 。

$$(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2' : \boldsymbol{\beta}_2') = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

由最后一个矩阵知线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_2$ 无解, 因此 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出。

方法 2：对 $(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2' \mid \boldsymbol{\beta}_1', \boldsymbol{\beta}_2')$ 施行初等行变换:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2' : \boldsymbol{\beta}_1', \boldsymbol{\beta}_2') = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 11 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

由最后一个矩阵知线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_1$ 有解, $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_2$ 无解, 因此 $\boldsymbol{\beta}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，而 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出。

又 $(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2' : \boldsymbol{\beta}_1') \to \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, 所以有 $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 。

例 3.2 判别下列向量组是线性相关还是线性无关:

（1） $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,6)$ 。

（2） $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,-5,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-3,-5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,-13,11),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,-14,-3)$ 。

解：（1） 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 对应的行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_3'|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}=1\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。

（2） 考虑齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\2x_1+x_2+5x_3+5x_4=0\\-5x_1-3x_2-13x_3-14x_4=0\\4x_1-5x_2+11x_3-3x_4=0\end{cases}\tag{15}$$

因

$$(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \boldsymbol{\alpha}_3', \boldsymbol{\alpha}_4') = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ -5 & -3 & -13 & -14 \\ 4 & -5 & 11 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & -4 \\ -1 & -8 & -2 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & -4 & -18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -67 & -67 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由最后一个矩阵知齐次线性方程组(15)有非零解, 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关。

注：（2）也可用（1）的方法求解, 即因 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 对应的行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \boldsymbol{\alpha}_3', \boldsymbol{\alpha}_4'| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ -5 & -3 & -13 & -14 \\ 4 & -5 & 11 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关。

例 3.3 证明：n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2'\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2'\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2'\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n'\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n'\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n'\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \neq 0$$

证明：令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则有

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1' \\ \boldsymbol{\alpha}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n' \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2'\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2'\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2'\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n'\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n'\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n'\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

于是 $D = |\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^2$ 。又 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 即 $D = |\boldsymbol{A}|^2 \neq 0$, 得证。

内容概要

例 3.4 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-2,0,3)', \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,-5,-3,6)', \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,3,0)',$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4 = (2,-1,4,-7)', \boldsymbol{\alpha}_5 = (5,-8,1,2)'$$

的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量表示成该极大线性无关组的线性组合。

解：以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为列构成矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换化成阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 中有 3 个非零行, 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3。又因 $\boldsymbol{B}$ 中各个非零行的第一个非零元素分别在 $1, 2, 4$ 列, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组。

对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 继续做初等行变换将其化成最简阶梯形矩阵, 即

$$\boldsymbol{B} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可得 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4$ 。

例 3.5 设向量组
$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)',\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)',\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)',\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)'$ 。

（1）当 p 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)'$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出。

（2）当 p 为何值时, 该向量组线性相关? 并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组。

解：对矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\mid\boldsymbol{\alpha})$ 做初等行变换:

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & -8 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{array}\right)$$

（1）当 $p \neq 2$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关。此时

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3p-4}{p-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \frac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha}_4$$

（2）当 $p=2$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关。此时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3 , $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ （或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$) 为其一个极大线性无关组。

注：四个 4 维向量是否线性相关, 可直接由其构成的行列式是否为零来判断, 而考虑到还要求把 $\boldsymbol{\alpha}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出, 即求线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}$ 的解, 两步结合在一起进行, 直接通过初等行变换化矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4 \mid \boldsymbol{\alpha})$ 为阶梯形矩阵, 在 p 确定时, 求向量组的秩和极大线性无关组可按常规方法处理。

内容概要

例 3.6 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系。

解：对齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换将其化成最简阶梯形矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得原齐次线性方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases} \tag{16}$$

式 (16) 中 x_3, x_4, x_5 为自由未知量。

方法 1：令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 分别等于 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 代入到一般解式(16) 中得

$$\zeta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \zeta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \zeta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 为所求的一个基础解系。

方法 2：由一般解式 (16) 得

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \tag{17}$$

将式(17)写成向量形式:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 $\zeta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\zeta_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\zeta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 为所求的一个基础解系。

注：求齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x=0$ 的一个基础解系的步骤。

(1) 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换将其化成最简阶梯形矩阵，得到 $r(\boldsymbol{A})$ 。

(2) 写出原齐次线性方程组的一般解。

(3) 令一般解中的自由未知量组成的 $n-r(\boldsymbol{A})$ 维列向量分别取值
$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，就得到原齐次线性方程组的 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个解 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r(\boldsymbol{A})}$，即为一个基础解系。

例 3.7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, $\boldsymbol{\beta}_1 = t_1\boldsymbol{\alpha}_1 + t_2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = t_1\boldsymbol{\alpha}_2 + t_2\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s = t_1\boldsymbol{\alpha}_s + t_2\boldsymbol{\alpha}_1$, 其中 t_1, t_2 为实常数, 试问 t_1, t_2 满足何关系时, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x = 0$ 的一个基础解系。

解: 由题设知 $\boldsymbol{\beta}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合, 所以 $\boldsymbol{\beta}_i$ 均为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解, 下面只需要使 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关即可。设

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s = \mathbf{0} \tag{18}$$

即

$$(t_1k_1 + t_2k_s)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\,\boldsymbol{\alpha}_s = 0$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 所以有

$$\left\{\begin{array}{c} t_1k_1 + t_2k_s = 0 \\ t_2k_1 + t_1k_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ t_2k_{s-1} + t_1k_s = 0 \end{array}\right. \tag{19}$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关当且仅当齐次线性方程组(18)只有零解, 当且仅当齐次线性方程组(19)只有零解, 当且仅当齐次线性方程组 (19) 的系数行列式:

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix}_{s\times s} = t_t^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0$$

即当 s 为偶数且 $t_1 \neq \pm t_2$ 时或当 s 为奇数且 $t_1 \neq -t_2$ 时, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关, 此时 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{A}x = 0$ 的一个基础解系。

注: 由于齐次线性方程组解的线性组合仍为其解, 故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也为线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解, 又基础解系含 s 个解, 因此, 当且仅当 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关时, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 是基础解系, 而证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的一般方法是设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\beta}_s = 0$, 推出 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$, 从而转化为判断一个齐次线性方程组只有零解的问题。

例 3.8 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases} \tag{20}$$

的一个基础解系为 $(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n}), (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n}), \cdots, (b_{n1} b_{n2}, \cdots, b_{n,2n})$, 试写出齐次线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0 \\ \cdots\cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

的通解, 并说明理由。

解： **方法 1**：将 $\boldsymbol{\beta}_1=(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n}),\boldsymbol{\beta}_2=(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n}),\cdots,$ $\boldsymbol{\beta}_n=(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})$ 代入齐次线性方程组式 (20) 的第 i 个方程, $i=1,2,\cdots,n$, 得

$$\begin{cases} a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{12}+\cdots+a_{i,2n}b_{1,2n}=0\\ a_{i1}b_{21}+a_{i2}b_{22}+\cdots+a_{i,2n}b_{2,2n}=0\\ \cdots\cdots\\ a_{i1}b_{n1}+a_{i2}b_{n2}+\cdots+a_{i,2n}b_{n,2n}=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} b_{11}a_{i1}+b_{12}a_{i2}+\cdots+b_{1,2n}a_{i,2n}=0\\ b_{21}a_{i1}+b_{22}a_{i2}+\cdots+b_{2,2n}a_{i,2n}=0\\ \cdots\cdots\\ b_{n1}a_{i1}+b_{n2}a_{i2}+\cdots+b_{n,2n}a_{i,2n}=0 \end{cases} \tag{22}$$

由式 (22) 知 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i,2n})\,(i=1,2,\cdots,n)$ 都是齐次线性方程组 (21) 的解, 又 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为齐次线性方程组(20)的一个基础解系, 所以齐次线性方程组 (20) 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩必为 n, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 而齐次线性方程组 (21) 的系

数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 n, 未知量的个数为 $2n$, 因此其 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 必为其一个基础解系, 故齐次线性方程组(21)的通解为

$$\boldsymbol{\eta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n \tag{23}$$

式 (23) 中的 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是任意常数。

方法 2：记齐次线性方程组 (20) 与线性方程组 (21) 的系数矩阵分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 则由题设有 $\boldsymbol{AB}' = \boldsymbol{O}$, 于是 $(\boldsymbol{AB}')' = \boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{BA}' = \boldsymbol{O}$, 可见 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是齐次线性方程组 (21) 的 n 个解。

因为 $r(\boldsymbol{A}) = 2n - n = n$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关。又 $r(\boldsymbol{B}) = n$, 且齐次线性方程组 (21) 含未知量的个数为 $2n$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是齐次线性方程组 (21) 的一个基础解系，因此齐次线性方程组 (21) 的通解为 $\boldsymbol{\eta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n$, $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是任意常数。

注：**求齐次线性方程组的通解关键在于求出它的一个基础解系。**

内容概要

例 3.9 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1 \end{cases}$。已知 $(1,-1,1,-1)$ 是该方程组的一个解，试求该方程组的全部解，并用它的导出组的基础解系表示全部解。

解：设原线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，将 $(1,-1,1,-1)$ 代入原方程组得 $\lambda=\mu$，于是原方程组的增广矩阵为

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 4-2\lambda & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array}\right)$$

当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时,

$$\bar{\boldsymbol{A}} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

知 $r(\bar{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = 3 < 4$, 故地时原方程组有无穷多解, 其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \end{cases} \tag{24}$$

式 (24) 中的 x_4 为自由未知量。由一般解式 (24) 得

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \\ x_4 = x_4 \end{cases} \tag{25}$$

令式 (25) 中的 $x_4 = k$, 之后将其写成向量的形式就得到原线性方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

式 (26) 中的 k 为任意常数, $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ 为原线性方程组导出组的一个基础解系。

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，因

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

知 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=2<4$, 故此时方程组也有无穷多解, 其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_2 = -3x_3 - x_4 + 1 \end{cases} \tag{27}$$

式 (27) 中的 x_3, x_4 为自由未知量。由一般解式 (27) 得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_2 = -3x_3 - x_4 + 1 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \tag{28}$$

令式(28)中的 $x_3=k_1, x_4=k_2$, 之后将其写成向量的形式就得到原线性方程组的全部解为

$$\gamma=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{29}$$

式 (29) 中的 k_1, k_2 为任意常数, $\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 为原线性方程组导出组的一个基础解系。

例 3.10 当 λ 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} (2\lambda+1)x_1-\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda-1 \\ (\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda \\ (2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda \end{cases}$ 有唯一解、无解、无穷多解? 在有无穷多解时, 求通解。

注: 系数矩阵和增广矩阵含有参数的线性方程组称为含参数线性方程组。求解含参数线性方程组时, 常采取以下方法:

(1) 对方程组的增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 通过初等行变换化成阶梯形矩阵, 然后根据 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})$ 是否成立, 即考察线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的秩是否相等, 讨论参数在什么情况下原方程组有解与无解, 有解时再求出一般解。

(2) 当线性方程组中方程的个数与未知数的个数相同时, 可利用克拉默法则, 即计算系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$, 对于使得 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 的参数值, 方程组有唯一解, 且可用克拉默法则求出唯一解（当线性方程组的元数 n 不高时）; 而对于使 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的参数值, 分别列出增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 用消元法求解。

解：**方法 1**：设原线性方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 。

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-2 \\ \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

（1）当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\pm1$ 时, 原线性方程组有唯一解。

（2）当 $\lambda=0$ 时, 原线性方程组的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

知 $r(\bar{\boldsymbol{A}})=3, r(\boldsymbol{A})=2$, 故此时原线性方程组无解。

（3）当 $\lambda = 1$ 时, 增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

知 $r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3, r(\boldsymbol{A}) = 2$, 故此时原线性方程组无解。

（4）当 $\lambda = -1$ 时, 原线性方程组的增广矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ & & 3 & \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

知 $r(\bar{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$, 故此时原线性方程组有无穷多解。其一般解为

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_2 = -1 - \frac{3}{5}x_3 \end{array} \right. \tag{30}$$

式 (30) 中的 x_3 为自由未知量。由一般解式 (30) 得

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_2 = -1 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \tag{31}$$

令式(31) 中的 $x_3 = t$, 之后将其写成向量形式就得到原线性方程组的通解为

$$\gamma = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

式 (32) 中的 t 为任意常数, $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ 为原线性方程组导出组的一个基础解系。

方法 2：

$$
\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 & \lambda \end{array}\right)
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1-2\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -5 & -4\lambda^2-\lambda & 8\lambda^2+2\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) & -(\lambda+1)\left(2\lambda^2-2\lambda+1\right) \end{pmatrix}
$$

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \pm 1$ 时, $r(\bar{\boldsymbol{A}}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3$, 原线性方程组有唯一解。

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3$, 原线性方程组无解。

(3) 当 $\lambda = 1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = 2, r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3$, 原线性方程组无解。

(4) 当 $\lambda = -1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$, 原线性方程组有无穷多解, 且

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

其余同前。

注: 如果线性方程组中方程的个数与未知量的个数相同, 最好采用方法 1 求解。因为求含参数的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 比只用初等行变换化含参数的增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 为阶梯形矩阵要容易。另外, 如果直接对 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 进行初等行变换化简, 可能会产生讨论不全的错误。

例 3.11 设 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 都是 n 元齐次线性方程组, 且 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解, 证明: $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$ 。

证明:

必要性: 将 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解空间分别记为 $N(\boldsymbol{A})$ 和 $N(\boldsymbol{B})$ 。因为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解, 所以它们有相同的解空间, 即 $N(\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{B})$, 因此 $n-r(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{B})$, 推出 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$ 。

充分性: 设 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r$ 。若 $r=n$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 都只有零解, 此时结论成立。若 $r<n$, 设 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系。因为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解, 所以 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解。又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r$, 所以 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的任一个基础解系所含其解的个数都为 $n-r(\boldsymbol{B})=n-r(\boldsymbol{A})=n-r$, 因此 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{B}x=0$ 的一个基础解系, 故 $\boldsymbol{A}x=0$ 与 $\boldsymbol{B}x=0$ 同解。

例 3.12 已知 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，又 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 都是它的解，且 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0,2)'$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,0,1,3)'$，试求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解。

解：由于 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 $4-3=1$ 个解。由解的性质知

$$\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1=(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=(1,0,1,3)'-(1,1,0,2)'=(0,-1,1,1)'$$

是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，可以当成基础解系。又

$$\boldsymbol{\gamma}_0=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)'$$

是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的特解，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+k(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)'+k(0,-1,1,1)' \tag{33}$$

式 (33) 中的 k 为任意常数。

例 3.13 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})'\,(i=1,2,\cdots,r;r<n)$ 是 n 维实向量, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 又已知 n 维实向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

的非零解，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性。

解：设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,l$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+l\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0} \tag{34}$$

由于 $\boldsymbol{\beta}$ 为给定的齐次线性方程组的非零解, 所以有

$$\begin{cases} a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n=0\\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n=0\\ \cdots\cdots\\ a_{r1}b_1+a_{r2}b_2+\cdots+a_{rn}b_n=0 \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_1 = 0, \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_2 = 0, \cdots, \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_r = 0 \tag{35}$$

由式 (34) 可得

$$k_1\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}_r + l\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} = 0 \tag{36}$$

由式(35)和式 (36) 得 $l\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} = 0$, 而 $\boldsymbol{\beta} \neq 0$ 是 n 维实向量, 所以 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} > 0$, 从而 $l = 0$, 再由式 (34) 有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 从而有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$, 即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关。

例 3.14 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是某一非齐次线性方程组的一个解, 而 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 是它的导出方程组的一个基础解系。令

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{t+1} = \boldsymbol{\eta}_t + \boldsymbol{\alpha}$$

证明：此非齐次线性方程组的任一解 $\boldsymbol{\gamma}$ 都可表示成

$$\boldsymbol{\gamma} = u_1\boldsymbol{\gamma}_1 + u_2\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + u_{t+1}\boldsymbol{\gamma}_{t+1} \tag{37}$$

式 (37) 中的 $u_1 + u_2 + \cdots + u_{t+1} = 1$ 。

证明：由非齐次线性方程组与其导出组解的关系知 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$ 是导出组的解, 因此存在数 $l_1, l_2, \cdots, l_t$, 使得 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}=l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t$, 推出

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t \\
&= \boldsymbol{\gamma}_1+l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t \\
&= \boldsymbol{\gamma}_1+l_1\left(\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_1\right)+\cdots+l_t\left(\boldsymbol{\gamma}_{t+1}-\boldsymbol{\gamma}_1\right) \\
&= \left(1-l_1-\cdots-l_t\right)\boldsymbol{\gamma}_1+l_1\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\gamma}_{t+1}
\end{aligned}
$$

令 $u_1=\left(1-l_1-\cdots-l_t\right), u_2=l_1, \cdots, u_{t+1}=l_t$，那么

$$
\boldsymbol{\gamma}=u_1\boldsymbol{\gamma}_1+u_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\gamma}_{t+1}, \quad u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1
$$