高等代数选讲
Selection of Advanced Algebra

第四讲：矩阵
Lecture 4: Matrices

主讲教师：艾武

数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics
桂林理工大学
Guilin University of Technology

内容概要

内容概要

（一）矩阵的定义

由数域 P 上 $s \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,n)$ 按一定次序排成的 s 行 n 列的**矩形数表**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为数域 P 上的 $s \times n$ **矩阵**, 记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{sn}$, a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列**元素**。当 $s = n$ 时, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级**方阵**, 记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{nn}$ 。

（二）矩阵的相等

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mn}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{lk}$, 如果 $m = l, n = k$ 且 $a_{ij} = b_{ij}$ 对 $i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$ 都成立, 我们就说 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, 即两个矩阵完全相同。

（三）特殊矩阵

（1）**零矩阵**：元素全为 0 的 $s \times n$ 矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}_{sn}$，简记 $\boldsymbol{O}$ 。

（2）**负矩阵**：对于矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{sn}$，称矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$ 。

（3）**单位矩阵**：主对角线上的元素全是 1，其余元素全是 0 的方阵称为单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}$，$n \times n$ 单位矩阵也记为 $\boldsymbol{E}_n$ 。

（4）**对角矩阵**：主对角线之外的元素全为 0 的方阵称为对角矩阵。

（5）**数量矩阵**：主对角线上元素完全相同的对角矩阵称为数量矩阵, 即 $k\boldsymbol{E}$，（k 是一个数)。

（6）**上、下三角矩阵:** 主对角线下方元素全为 0 的方阵称为上三角矩阵, 主对角线上方元素全为 0 的方阵称为下三角矩阵。

（7）**对称矩阵**：满足 $a_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$ 的 n 级方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{nn}$ 称为对称矩阵。

（8）**反对称矩阵**：满足 $a_{ij} = -a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}' = -\boldsymbol{A}$ 的 n 级方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{nn}$ 称为反对称矩阵。

（9）**幂等矩阵**：满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 的 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为幂等矩阵。

（10）**幂零矩阵**：对于 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$, 若存在正整数 m, 使得 $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{O}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵。

（11）**对合矩阵**：满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}_n$ 的 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对合矩阵。

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

2 典型例题

1. 矩阵加法的定义

设有数域 P 上的两个 $s\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{sn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{sn}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

则矩阵

$$
\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{sn} = (a_{ij} + b_{ij})_{sn} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}
$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 。

注：矩阵的加法就是矩阵对应元素的相加, 因此, 相加的矩阵必须要有相同的行数和列数（**同型**)。

2. 矩阵加法的运算规律

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$$

3. 和矩阵的秩

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$$

1. 数量乘法的定义

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{sn}$ 是数域 P 上的一个 $s\times n$ 矩阵, $k\in P$ 。称 $s\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 k 的数量乘积, 记为 $k\boldsymbol{A}$ 。也就是说, 用数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都乘以数 k 。

2. 数量乘法的运算规律

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是数域 P 上的 $s \times n$ 矩阵, $k, l \in P$, 那么

$$\begin{aligned}(k+l)\boldsymbol{A} &= k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A} \\ k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B} \\ k(l\boldsymbol{A}) &= (kl)\boldsymbol{A} \\ 1\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

3. 数量乘积的秩

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的 $s \times n$ 矩阵, $k \in P$ 且 $k \neq 0$ ，那么

$$r(k\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$$

1. 矩阵乘法的定义

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{sn}$, $\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{nm}$, 那么矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sm} \end{pmatrix} \tag{1}$$

式(1)中的 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,m$, 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**, 记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 。

2. 矩阵乘法的运算法则

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的对应元素的乘积之和。因此, 我们要求 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等。

3. 矩阵乘法的运算规律

（1）对任意矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{sn}$, 有 $\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$ 。

（2）结合律: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 。

（3）交换律: 不成立，即一般来说，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 。

从而一般地,

$$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2 \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2 \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n\neq\boldsymbol{A}^n+C_n^1\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}+\cdots+C_n^{n-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{n-1}+\boldsymbol{B}^n \tag{5}$$

（4）消去律: 不成立。即

- 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时, 未必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 成立;
- 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 成立;
- 当 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{CA}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 成立。

注：如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 那么

- 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;
- 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{CA}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 。

（5）分配律:

- 第一分配律: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ 。
- 第二分配律: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$ 。

4. 方阵的方幂

（1）方阵方幂的定义

对于 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 及正整数 $k, \boldsymbol{A}^k$ 就是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘。

（2）方阵方幂的性质

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级方阵, k, l 是任意正整数, 那么

$$\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}^{k+l}$$

$$\left(\boldsymbol{A}^k\right)^l = \boldsymbol{A}^{kl}$$

1. 定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的任一 n 级方阵, $f(x)$ 是 $P[x]$ 中任一多项式, 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 那么

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}_n$$

称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个**多项式**。

2. 性质

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的任一 n 级方阵, $f(x), g(x) \in P[x]$, 设

$$h(x) = f(x) + g(x),\ r(x) = f(x)g(x)$$

则有

$$h(\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{A}) + g(\boldsymbol{A})$$
$$r(\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$$

1. 矩阵转置的定义

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**, 记为 $\boldsymbol{A}'$ 。

2. 矩阵转置的运算规律

（1） $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$;

（2） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$;

（3） $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$;

（4） $(k\boldsymbol{A})' = k\boldsymbol{A}'$ 。

3. 矩阵转置的秩

（1） $r\left(\boldsymbol{A}'\right) = r(\boldsymbol{A})$;

（2） $r\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'\right) = r\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right) = r(\boldsymbol{A})$ （$\boldsymbol{A}$ 为实矩阵)。

内容概要

（1）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 级方阵，则

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

（2）设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 都是 n 级方阵, 则

$$|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m| = |\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$$

（二）非退化矩阵

1. 非退化矩阵的定义

n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**非退化的**, 如果 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$； 否则称为退化的。

2. 非退化矩阵的判定

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级方阵, 那么下列条件等价:

- $\boldsymbol{A}$ 非退化;
- $r(\boldsymbol{A}) = n$;
- $\boldsymbol{A}'$ 非退化;
- $\boldsymbol{A}^*(n \geqslant 2)$ 非退化。

（2）设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个 n 级方阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 非退化当且仅当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均非退化。

注：（2）的等价命题为 $\boldsymbol{AB}$ 退化当且仅当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 之中至少有一个是退化的。

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times s$ 矩阵, 则

$$r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B}))$$

注:

（1）可推广为

$$r\left(\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \cdots \boldsymbol{A}_m\right) \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant m}\left(r\left(\boldsymbol{A}_j\right)\right)$$

（2）Sylvester （西尔维斯特不等式）: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times m$ 矩阵， $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times s$ 矩阵, 那么

$$r(\boldsymbol{AB}) \geqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - m$$

内容概要

子矩阵

（一）子矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 在 $\boldsymbol{A}$ 中任取 $s(1 \leqslant s \leqslant m)$ 行 $l(1 \leqslant l \leqslant n)$ 列, 位于这 s 行 l 列交点处的 $s \times l$ 个元素按原来的次序做成的 $s \times l$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**子矩阵**。

（二）子矩阵的性质

设 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一子矩阵, 则

$$r(\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A})$$

这是因为 $\boldsymbol{B}$ 的任一子式都是 $\boldsymbol{A}$ 的子式, 又矩阵的秩等于其非零子式的最大级数。

内容概要

n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为可逆的, 如果存在 n 级方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}_n \tag{6}$$

适合式(6)的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是唯一的, 称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**, 记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 。

注：可逆矩阵又称为非退化矩阵、非奇异矩阵、满秩矩阵。

2. 伴随矩阵

1）**定义**: 设 $\boldsymbol{A}_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式（即 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式），则将矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**, 记为 $\boldsymbol{A}^*$ 。

2）性质: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级方阵, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$$

1. 可逆矩阵的判定

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级方阵。

（1）$\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 非退化 $(|\boldsymbol{A}| \neq 0)$, 且此时 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 。

（2）$\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当存在 n 级方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$ 成立, 此时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵。

（3）$\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $r(\boldsymbol{A}) = n$ （即 $\boldsymbol{A}$ 是**满秩矩阵**）。

2. 可逆矩阵的性质

（1）设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 级方阵, 如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n$, 那么必有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$, 反之亦然, 此时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵, 且它们互为逆矩阵。

（2）如果 n 级方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆, 那么 $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}^k$ （k 是任一正整数）, $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也可逆, 且

- $\left(\boldsymbol{A}'\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)'$
- $\left(\boldsymbol{A}^k\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^k$
- $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

注：设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_k$ 都是 n 级可逆矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k$ 是可逆矩阵, 且

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{-1} = \boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}$$

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵, 如果 $\boldsymbol{P}$ 是 $s\times s$ 可逆矩阵, $\boldsymbol{Q}$ 是 $n\times n$ 可逆矩阵, 那么

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}) = r(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})$$

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、矩阵的基本概念

二、矩阵的运算

三、矩阵乘积的行列式与秩

四、子矩阵

五、可逆矩阵

六、初等矩阵

七、分块矩阵

八、矩阵等价与矩阵的标准形

2 典型例题

知识点 1: 方阵的行列式

知识点 2: 矩阵多项式

知识点 3: 求解矩阵方程

知识点 4: 矩阵的方幂

知识点 5: 初等矩阵

知识点 6: 分块矩阵

知识点 7: 矩阵的标准形

知识点 8: 矩阵的秩

知识点 9: 矩阵分解

（一）初等矩阵的定义及类型

1. 初等矩阵的定义

单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**。

2. 初等矩阵的三种类型

（1）互换单位矩阵的 i, j 两行（列）位置, 得到第一种初等矩阵:

$$\boldsymbol{P}(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

（2）以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵的第 i 行 (列), 得到第二种初等矩阵:

$$\boldsymbol{P}(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

（3）把单位矩阵的第 j 行的 c 倍加到第 i 行或第 i 列的 c 倍加到第 j 列, 得到第三种初等矩阵:

$$\boldsymbol{P}(i,j(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

（二）初等矩阵的性质

（1）初等矩阵均为可逆矩阵, 这是因为

$$|\boldsymbol{P}(i,j)|=-1\neq 0,\quad |\boldsymbol{P}(i(k))|=k\neq 0,\quad |\boldsymbol{P}(i,j(c))|=1\neq 0$$

（2）初等矩阵的逆矩阵与其是同种类型的初等矩阵, 即

- $\boldsymbol{P}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j)$;
- $\boldsymbol{P}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{P}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$;
- $\boldsymbol{P}(i,j(c))^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j(-c))$ 。

对一个 $s\times n$ 矩阵左乘一个 $s\times s$ 初等矩阵就相当于对它做相应的初等行变换, 对其右乘一个 $n\times n$ 初等矩阵相当于对它做相应的初等列变换。

内容概要

（一）分块矩阵的概念

被横线和纵线分成若干小块的矩阵称为**分块矩阵**。

(二) 分块矩阵的运算

对矩阵的恰当分块, 有利于矩阵的运算。

1. 加法

将矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{mn}$, $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{mn}$ 做相同的分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1q} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{p1} & \boldsymbol{B}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{pq} \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 中的 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 中的 $\boldsymbol{B}_{ij}(i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,q)$ 行数和列数都相同, 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q}+\boldsymbol{B}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q}+\boldsymbol{B}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1}+\boldsymbol{B}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2}+\boldsymbol{B}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq}+\boldsymbol{B}_{pq} \end{pmatrix}$$

2. 数量乘法

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq} \end{pmatrix}$ 和 $k \in P$, 有

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k\boldsymbol{A}_{11} & k\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1q} \\ k\boldsymbol{A}_{21} & k\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\boldsymbol{A}_{p1} & k\boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{pq} \end{pmatrix}$$

3. 乘法

将 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{sn}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{nm}$ 分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1l} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tl} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{l1} & \boldsymbol{B}_{l2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{lr} \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 中的 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 $s_i \times n_j$ 矩阵 $(i=1,2,\cdots,t; j=1,2,\cdots,l)$, $\boldsymbol{B}$ 中的 $\boldsymbol{B}_{jk}$ 是 $n_j \times m_k$ 矩阵 $(j=1,2,\cdots,l; k=1,2,\cdots,r)$, 也就是说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列的分割方法与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行的分割方法完全相同, 则**分块矩阵的乘法可按普通矩阵乘法的法则进行运算**:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{1k}\boldsymbol{B}_{k1} & \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{1k}\boldsymbol{B}_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{1k}\boldsymbol{B}_{kr} \\ \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{B}_{k1} & \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{B}_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{2k}\boldsymbol{B}_{kr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{lk}\boldsymbol{B}_{k1} & \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{lk}\boldsymbol{B}_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{lk}\boldsymbol{B}_{kr} \end{pmatrix}$$

4. 转置

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1q} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pq} \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}'_{11} & \boldsymbol{A}'_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}'_{p1} \\ \boldsymbol{A}'_{12} & \boldsymbol{A}'_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}'_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}'_{1q} & \boldsymbol{A}'_{2q} & \cdots & \boldsymbol{A}'_{pq} \end{pmatrix}$$

常见的矩阵分块方法

（1）$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{AB}_1 & \boldsymbol{AB}_2 & \cdots & \boldsymbol{AB}_m \end{pmatrix}$（矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块）

（2）$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix} \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分块）

（3）$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix} (\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_m) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_m \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B}_m \end{pmatrix}$（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分块，$\boldsymbol{B}$ 按列分块）

（4）$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\boldsymbol{B}_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}\boldsymbol{B}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{sj}\boldsymbol{B}_j \end{pmatrix}$

（矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按行分块）

（5）$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}=$

$\left(\sum_{i=1}^n b_{i1}\boldsymbol{A}_i,\ \sum_{i=1}^n b_{i2}\boldsymbol{A}_i,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^n b_{im}\boldsymbol{A}_i\right)$

（矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块）

准对角矩阵及其运算

（1）形如 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{A}_i$ 为 $n_i \times n_i$ 矩阵 $(i = 1, 2, \cdots, l)$) 的矩阵称为**准对角矩阵**。

（2）准对角矩阵的运算：设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_l \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 中的 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的 $\boldsymbol{B}_i$ 为同级方阵 $(i = 1, 2, \cdots, l)$, 则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{B}_l \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l\boldsymbol{B}_l \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^k & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l^k \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_1|\,|\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_l|$$

（k 是正整数），而且当 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,l)$ 均可逆时, $\boldsymbol{A}$ 也可逆, 且有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_l^{-1} \end{pmatrix}$$

（五）四分块矩阵

形如 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 的分块矩阵称为**四分块矩阵**，这是最简单也是最常见的分块矩阵。

1. 四分块三角矩阵

（1）形如 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 的四分块矩阵称为四分块上三角矩阵与四分块下三角矩阵。

（2）$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|$, 其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ 为方阵。

（3）当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ 均可逆时, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 也都可逆, 且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

注：（1）在四分块三角矩阵中, 主对角线上的矩阵块都是方阵。

（2）形如 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的四分块矩阵称为四分块次三角矩阵, 次对角线上的矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ 是方阵, 由拉普拉斯定理容易计算这种矩阵的行列式, 且当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ 均可逆时, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 也都可逆, 而且容易求出它们的逆矩阵。

四分块初等矩阵的定义

将四分块单位矩阵 $\boldsymbol{E}_{m+n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$ 经一次初等变换得到的分块矩阵称为四分块初等矩阵。

四分块初等矩阵的类型

将 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$ 的两行互换得到 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 两列互换得到 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_m\\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$。

将 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$ 的第一行左乘（或第一列右乘）m 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 得到 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$;

将 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$ 的第二行左乘（或第二列右乘）n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 得到 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$。

将$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$的第一行左乘 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 加到第二行（或第二列右乘 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 加到第一列) 得到$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$;

将$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$第二行左乘 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 加到第一行（或第一列右乘 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 加到第二列）得到$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$。

（1）四分块初等矩阵都是可逆矩阵, 而且它们的逆矩阵是与其同类型的四分块初等矩阵。例如:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_m \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$$

（2）对一个四分块矩阵左乘一个四分块初等矩阵就相当于对它做相应的初等行变换, 对其右乘一个四分块初等矩阵相当于对它做相应的初等列变换。例如:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{PA} & \boldsymbol{PB} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{GC} & \boldsymbol{B}+\boldsymbol{GD} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

四分块矩阵的秩

$$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}),$$

$$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$$

$$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \geqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{D})$$

$$r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \geqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{D})$$

内容概要

（一）矩阵等价与矩阵的标准形

1）矩阵等价的定义

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过一系列初等变换成为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**。

2）矩阵等价的性质

性质 1 （反身性）对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 都有 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价。

性质 2 （对称性）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价。

性质 3 （传递性）若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价。

3）矩阵等价的判定

（1）两个 $s\times n$ 矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的秩。

（2）$s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$ 。

秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $s\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 这个分块矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形, 简称**标准形**。

（二）行（列）满秩矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 若 $r(\boldsymbol{A})=m$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是**行满秩矩阵**; 若 $r(\boldsymbol{A})=n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是**列满秩矩阵**。

1）行满秩矩阵的性质

如果 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵, 即 $r(\boldsymbol{A})=m$, 那么存在 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{AQ}=(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$, 即行满秩矩阵可经一系列初等列变换化为标准形。

2）列满秩矩阵的性质

（1）如果 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵, 即 $r(\boldsymbol{A})=n$, 那么存在 m 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 即列满秩矩阵可经一系列初等行变换化为标准形。

（2）如果 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**列满秩实矩阵**, 那么 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是**正定矩阵**。

内容概要

例 4.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 级方阵, $|\boldsymbol{A}|=-2$, 把 $\boldsymbol{A}$ 按行分块 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,3)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量, 则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1\\ 3\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_1\end{vmatrix}=(\quad)$。

解: 计算抽象矩阵的行列式, 主要利用行列式的性质和行列式的计算公式。

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1\\ 3\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_3\\ 3\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2\boldsymbol{A}_1\\ 3\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_3\\ \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_1\end{vmatrix}+0=-3\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3\end{vmatrix}=-3|\boldsymbol{A}|=6$$

例 4.2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 级方阵, $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=-3$, 则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{-1}\right|=(\quad)$。

解: 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 常利用 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 来表示 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。同理, $\boldsymbol{B}^{*}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}$ 。

$$
\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{-1}\right| &= \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{B}\left|\boldsymbol{B}^{-1}-\right|\boldsymbol{A}\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\right| \\
&= \left|-3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}-2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\right| \\
&= \left|-5\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\right| \\
&= (-5)^{n}\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right| \\
&= \frac{(-5)^{n}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{5^{n}}{6}
\end{aligned}
$$

内容概要

例 4.3 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\quad)$, $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=(\quad)$。

解: 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 就是找矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或者 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$。

由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\right)=\boldsymbol{E}$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$。

同理, 由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}$, 即

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\left(-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right)=\boldsymbol{E}$$

故 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$。

内容概要

例 4.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 且

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^* = 8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E}_3 \tag{7}$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

解: 这是求解矩阵方程的问题。应先将方程化简为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}, \boldsymbol{XB}=\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的形式, 再通过左乘或右乘可逆矩阵求出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{CB}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$ 。

由已知可求得 $|\boldsymbol{A}|=4$, 于是 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}$, 进而得

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^* = \left(2\boldsymbol{A}^{-1}\right)^* = \left|2\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left(2\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = 2^3|\boldsymbol{A}|^{-1}\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A} \tag{8}$$

将式 (8) 代入式(7) 得

$$4\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = 8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{E}_3 \tag{9}$$

将式(9)的左右两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得

$$4\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = 8\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} \tag{10}$$

由式 (10)知

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{4}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}_3\right)^{-1} \tag{11}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 代入到式(11) 得

$$\boldsymbol{X} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、矩阵的基本概念

二、矩阵的运算

三、矩阵乘积的行列式与秩

四、子矩阵

五、可逆矩阵

六、初等矩阵

七、分块矩阵

八、矩阵等价与矩阵的标准形

2 典型例题

知识点 1: 方阵的行列式

知识点 2: 矩阵多项式

知识点 3: 求解矩阵方程

知识点 4: 矩阵的方幂

知识点 5: 初等矩阵

知识点 6: 分块矩阵

知识点 7: 矩阵的标准形

知识点 8: 矩阵的秩

知识点 9: 矩阵分解

例 4.5 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3), \boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$, 则 $\boldsymbol{A}^n=($ $)$。

解: 不要先求出 3 级矩阵 $\boldsymbol{A}$, 而是利用矩阵乘法的结合律得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^n &= (\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})^n \\
&= (\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}) \\
&= \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}')\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}')\boldsymbol{\beta} \\
&= \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}')^{n-1}\boldsymbol{\beta} \\
&= 3^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}) \\
&= 3^{n-1}\boldsymbol{A} \\
&= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

例 4.6 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$ 。

解: 方法 1 归纳法。

经计算知

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}$$

故

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}^2=2^2\boldsymbol{A}$$

设 $\boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^k=2^k\boldsymbol{A}$ 。所以

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&2^n&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

方法 2 用二项式定理进行展开。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

由 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{O}$, 以及式(12), 从而有

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^n=\boldsymbol{B}^n+\boldsymbol{C}^n=2^{n-1}\boldsymbol{B}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2^n&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&2^n&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

方法 3 利用矩阵相似对角化。

内容概要

例 4.7 计算 n 级初等矩阵的乘积:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}(n, n-1)\boldsymbol{P}(n-1, n-2)\cdots\boldsymbol{P}(2,1) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}(1,2)\cdots\boldsymbol{P}(n-2, n-1)\boldsymbol{P}(n-1, n) \tag{14}$$

解: 直接计算乘积的办法显然是不可取的, 应利用初等矩阵的性质来分析。

式 (13)可写为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}(n, n-1)\boldsymbol{P}(n-1, n-2)\cdots\boldsymbol{P}(2,1)\boldsymbol{E}_n \tag{15}$$

式 (15)可理解为对 n 级单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n$ 做 $n-1$ 次初等行变换: 先交换 $\boldsymbol{E}_n$ 的第 1，2 两行, 接着交换第 2，3 两行 $\cdots\cdots$ 最后交换第 $n-1, n$ 两行, 即

$$\boldsymbol{E}_n \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-1} \\ 1 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

同理得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 1 \\ \boldsymbol{E}_{n-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

例 4.8 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均是 3 级方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行的 -2 倍加到第 2 行得到矩阵 $\boldsymbol{A}_1$, 将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 1 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}_1$, 又知 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$ 。

解: 由已知得

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{P}(2,3(-2))\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{BP}(2,1(1)) \tag{16}$$

由式(16) 有

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{P}(2,3(-2))\boldsymbol{ABP}(2,1(1)) \tag{17}$$

由式(17) 得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{P}(2,3(-2))^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}(2,1(1))^{-1} \\
&= \boldsymbol{P}(2,3(2))\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}(2,1(-1)) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

内容概要

例 4.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $m > n$ 。若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}_n$, 证明：$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关。

证明：

方法 1 只需证明 $r(\boldsymbol{B}) = n$ 即可。

因为 $\boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 矩阵且 $m > n$, 所以 $r(\boldsymbol{B}) \leqslant \min(m, n) = n$, 再由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}_n$ 知 $n = r\left(\boldsymbol{E}_n\right) = r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B})$, 故 $r(\boldsymbol{B}) = n$ 。

方法 2 用线性无关的定义。

设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix}$, 又设

$$k_1 \boldsymbol{B}_1 + k_2 \boldsymbol{B}_2 + \cdots + k_n \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{0} \tag{18}$$

式(18) 即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{19}$$

将式(19)左乘 $\boldsymbol{A}$, 即

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\mathbf{0} \tag{20}$$

注意到 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}_n$, 于是由式 (20) 得

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{21}$$

式 (21)推出 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 这说明 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_n$ 线性无关。

例 4.10 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 且 $r(\boldsymbol{B})=n$ 。

证明：（1）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 。（2）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$ 。

证明：用行满秩矩阵的性质。因为 $r(\boldsymbol{B})=n$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 为行满秩矩阵, 于是存在 m 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix} \tag{22}$$

（1）当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时, 将式 (22)两端左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 有

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{O}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix} \tag{23}$$

由式 (23)知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 。

（2）当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$ 时, 有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 。由（1）知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{O}$, 推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$ 。

注：此题也可由线性方程组的解的理论证明。

例 4.11 设分块矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 n 级可逆矩阵, 试求 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 。

解: 方法 1 用分块乘法的初等变换。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \tag{24}$$

对式 (24) 两端求逆得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} \tag{25}$$

因 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$, 于是由式(25) 得

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

方法 2 用分块矩阵的初等行变换。

$$
\left(\begin{array}{c:c} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{E}_{2n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{array}\right)
\to \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{E}_n \end{array}\right)
\to \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{array}\right)
\to \left(\begin{array}{cc:cc} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{array}\right)
$$

故 $\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。

方法 3 用分块矩阵的乘法。设

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix} \tag{26}$$

式 (26) 中的 $\boldsymbol{X}_i(i=1,2,3,4)$ 都是 n 级矩阵。而

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \tag{27}$$

由式(27) 得

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{E} \end{cases} \tag{28}$$

由式 (28) 解得

$$\boldsymbol{X}_3 = \boldsymbol{B}^{-1}, \quad \boldsymbol{X}_4 = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{X}_1 = -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{C}^{-1},$$

故

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

例 4.12 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 级方阵, 证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$$

证明: 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \xrightarrow{-c_1+c_2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \end{vmatrix}$$

又

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix} = 1$$

因此

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$$

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、矩阵的基本概念

二、矩阵的运算

三、矩阵乘积的行列式与秩

四、子矩阵

五、可逆矩阵

六、初等矩阵

七、分块矩阵

八、矩阵等价与矩阵的标准形

2 典型例题

知识点 1: 方阵的行列式

知识点 2: 矩阵多项式

知识点 3: 求解矩阵方程

知识点 4: 矩阵的方幂

知识点 5: 初等矩阵

知识点 6: 分块矩阵

知识点 7: 矩阵的标准形

知识点 8: 矩阵的秩

知识点 9: 矩阵分解

例 4.13 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 级方阵, 且 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$, 证明: 存在 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$, 使得 $\boldsymbol{AMB} = \boldsymbol{O}$ 。

证明: 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的秩分别为 r, s, 则存在 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Q}_2$, 使得

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} r\text{个}1\ ,$$

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} (s\text{个}1)$$

因为 $r + s \leqslant n$, 所以 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{O}$, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ 。

令 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_2$ 即得证。

例 4.14 （Sylvester 西尔维斯特不等式）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵。证明: $r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$ 。

证明：利用矩阵的标准形。设 $r(\boldsymbol{A})=r$, 则存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$。

记 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{rm}\\ \boldsymbol{B}_{(n-r)m}\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{PAB}=\boldsymbol{PAQ}\cdot\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{rm}\\ \boldsymbol{B}_{(n-r)m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{rm}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

所以 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{PAB})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{rm}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r\left(\boldsymbol{B}_{rm}\right)$

因 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{rm}\\ \boldsymbol{B}_{(n-r)m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{rm}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}_{(n-r)m}\end{pmatrix}$, 故有

$$
\begin{aligned}
r(\boldsymbol{B}) &= r\left(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\right) \\
&= r\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{rm} \\ \boldsymbol{B}_{(n-r)m} \end{pmatrix} \\
&= r\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{rm} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}_{(n-r)m} \end{pmatrix}\right) \\
&\leqslant r\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{rm} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}_{(n-r)m} \end{pmatrix} \\
&= r\left(\boldsymbol{B}_{rm}\right) + r\left(\boldsymbol{B}_{(n-r)m}\right) \\
&\leqslant r(\boldsymbol{AB}) + (n-r) \\
&= r(\boldsymbol{AB}) + n - r(\boldsymbol{A})
\end{aligned}
$$

即

$$
r(\boldsymbol{AB}) \geqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n
$$

内容概要

知识点 8: 矩阵的秩

例 4.15 证明：$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ 。

证明： 由于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的子矩阵, 因此

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) &= r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \\ &= r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geqslant r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \end{aligned}$$

例 4.16 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 。证明: $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$ 。

证明: **方法 1** 线性方程组法。

将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列向量分块: $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{B}_2 \cdots \boldsymbol{B}_m)$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{AB}_1 & \boldsymbol{AB}_2 & \cdots & \boldsymbol{AB}_m \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{O} \end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}(i = 1, 2, \cdots, m)$ 。也就是说, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 从而 $r(\boldsymbol{B}) \leqslant n - r(\boldsymbol{A})$, 即 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$ 。

方法 2 分块矩阵初等变换法。

注意到 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，而 $n=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，所以考虑矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\\ &\to \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故

$$n=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$$

例 4.17 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级方阵, 证明:（1）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$ 。

（2）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 则 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$ 。

证明:

（1）由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 推出 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 再由例 4.16 知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\leqslant n$ 。

又由例 4.15 知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{E})=n$, 因此 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$ 。

（2）同理可证。

例 4.18 (北京大学, 2005 年）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级方阵, 证明: 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$, 则 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)=n$ 。

证明：方法 1 由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$ 有 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)=\boldsymbol{O}$。再由例 4.16 知 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)\leqslant n$ 。另一方面,

$$\begin{aligned}
&r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)=r(-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+r\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)\\
\geqslant &r\left(-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)=r\left(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)=r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) \quad \text{（因}\boldsymbol{A}\text{ 可逆）}
\end{aligned}$$

又

$$(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^3=4\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=-\frac{1}{2}(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+\frac{9}{2}\boldsymbol{A}$$

故 $(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\right)=\frac{9}{2}\boldsymbol{A}$, 因此 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆，即 $r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n$ 。因此 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)\geqslant n$ 。

综上，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)=n$ 。

方法 2 由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)=\boldsymbol{O}$, 所以考虑多项式

$$f(x)=1-x^3=(1-x)\left(1+x+x^2\right)$$

因为 $\left(1-x, 1+x+x^2\right)=1$, 又 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right)=\boldsymbol{O}$，所以若设 $\boldsymbol{W}_1$，$\boldsymbol{W}_2$ 分别是齐次线性方程组 $\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right) x=\mathbf{0}$ 与 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) x=\mathbf{0}$ 的解空间，那么 $\mathbb{C}^n=\boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2$，事实上，因为所以存在多项式 $u(x), v(x)$ ，使得 $\left(1-x, 1+x+x^2\right)=1$,

$$1=u(x)(1-x)+v(x)\left(1+x+x^2\right) \tag{29}$$

由式(29) 推出

$$\boldsymbol{E}=u(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+v(\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\right) \tag{30}$$

于是，由式 (30), 任取 $\alpha \in \mathbb{C}^n$，有

$$\boldsymbol{\alpha} = u(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} + v(\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{\alpha}$$

而

$$\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)(u(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}) = u(\boldsymbol{A})\left((\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\right)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{31}$$

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\left(v(\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{\alpha}\right) = \left((\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\right)v(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{32}$$

由式 (31) 知 $u(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\alpha \in \boldsymbol{W}_1$，由式 (32) 知 $v(\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\alpha \in \boldsymbol{W}_2$，因此 $\mathbb{C}^n = \boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W}_2$。又任取 $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2$，有 $\boldsymbol{\beta} = u(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\beta} + v(\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{\beta}$，且 $\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$，$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\beta = 0$, 所以 $\beta = 0$, 因此 $\mathbb{C}^n = \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2$，推出

$$n = \dim \mathbb{C}^n = \dim \boldsymbol{W}_1 + \dim \boldsymbol{W}_2 = (n - r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})) + \left(n - r\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\right)$$

因此 $r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) + r\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right) = n$ 。

例 4.19 （Sylvester 不等式）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵。使用不同于例 4.14 的方法证明：$r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$ 。

证明：利用分块矩阵初等变换法。将 $r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$ 变形为 $r(\boldsymbol{AB})+n\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$, 注意到

$$r(\boldsymbol{AB})+n=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix},\quad r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}&\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{E}_n&-\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\mathrm{O}\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以 $r(\boldsymbol{AB})+n=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$ 。因此 $r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$ 。

内容概要

例 4.20 （1）设 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 证明：存在 $s\times r$ 列满秩矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $r\times n$ 行满秩矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{T}$ 。

（2）设有 $n\times r$ 列满秩矩阵 $\boldsymbol{A}$, 证明：存在 $r\times n$ 行满秩矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_r$ 。

证明：（1）由于 $r(\boldsymbol{A})=r$, 故存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{T},$$

其中 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 为列满秩矩阵, $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{E}_r\quad \boldsymbol{O})\,\boldsymbol{Q}^{-1}$ 为行满秩阵。

（2）因为 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵, 所以存在 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{PA} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

又

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} (\boldsymbol{PA}) = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \right) \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_r$$

所以

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}$$