高等代数选讲
Selection of Advanced Algebra

第五讲：二次型
Lecture 5: Quadratic Forms

主讲教师：艾武

数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics
桂林理工大学
Guilin University of Technology

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

二次型及其矩阵表示

二次型的标准形与规范形

2 典型例题

知识点 1: 二次型的矩阵与秩的求法

知识点 2: 化二次型为标准形

知识点 3: 化复、实二次型为规范形

知识点 4: 正定、半正定二次型的判别

知识点 5: 矩阵合同的证明

内容概要

二次型的定义

设 P 是一个**数域**, 一个系数在数域 P 中的关于**文字** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**二次齐次多项式**

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{1}$$

称为数域 P 上的一个 n 元**二次型**, 简称二次型, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 简记为 f 。

注：若 $P = \mathbf{C}$, 就称式 (1)为**复二次型**; 若 $P = \mathbf{R}$, 就称式 (1) 为**实二次型**。

设 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{nn}$ 为**对称矩阵**, 那么二次型(1) 可以唯一地表示成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 (1) 的**矩阵**, 即二次型(1)的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 (1) 的**秩**。

注：（1）二次型 (1) 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定是对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上第 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 个元素恰为二次型 (1) 中 x_k^2 的系数, 而 A 的第 i 行第 j 列元素和第 j 行第 i 列元素 $(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$ 都等于二次型 (1)中 x_ix_j 系数的二分之一, 因此二次型和它的矩阵是相互唯一确定的, 这也给出了求二次型矩阵的方法。

（2）若 $\boldsymbol{B}$ 是 n 级对称矩阵, 使得二次型(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$, 那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ 。

（3）设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{nn}$, 如果 $c_{kk}=a_{kk}$ $(k=1,2,\cdots,n), c_{ij}+c_{ji}=2a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$ ，那么一定有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$$

这说明将二次型 (1) 写成矩阵乘积的形式写法是不唯一的, 但要注意矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可能不是对称矩阵, 如果 $\boldsymbol{C}$ 不是对称矩阵, 那么 $\boldsymbol{C}$ 就不是二次型 (1) 的矩阵。

例如: $f(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^2+4x_2^2-5x_3^2-7x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3$

令 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)'$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & -\frac{7}{2} & 1 \\ -\frac{7}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

有

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 不是对称矩阵, 所以只有 $\boldsymbol{A}$ 是 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵, 而 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的第 $1,2,3$ 个元素分别是 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中 x_1^2,x_2^2,x_3^2 的系数, A 的第 1 行第 2 列元素与第 2 行第 1 列元素都等于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中 x_1x_2 系数的二分之一, $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行第 3 列元素与第 3 行第 1 列元素都等于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中 x_1x_3 系数的二分之一, $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行第 3 列元素与第 3 行第 2 列元素都等于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中 x_2x_3 系数的二分之一, 利用这一点就可求出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两组文字，系数在数域 P 中的一组关系式

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_{22} + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_{22} + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_{22} + \cdots + c_{nn}y_n \end{array}\right. \tag{2}$$

称为由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个**线性替换**, 或简称线性替换。如果线性替换式(2) 的系数行列式

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么线性替换式(2)就称为**非退化的**。

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$, $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{nn}$, 那么线性替换式 (2)就可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$$

设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 是非退化线性替换, 那么二次型 (1)可写成

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=g(\boldsymbol{Y})$$

其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 。

这就是说非退化线性替换将二次型变成二次型，且如果 $\boldsymbol{A}$ 是二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵, 那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 就是二次型 $g(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 的矩阵。

注：线性替换式 (2)也称为数域 P 上的线性替换。

矩阵的合同

1. 矩阵合同的定义

数域 P 上 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 称为**合同的**, 如果有数域 P 上的 $n \times n$ **可逆矩阵** $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ ， 此时也称 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 在数域 P 上合同。

2. 矩阵合同的性质

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是数域 P 上的 $n \times n$ 矩阵。**合同是矩阵之间的一种等价关系**, 它具有反身性、对称性、传递性, 即

- **性质 1** $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同;
- **性质 2** 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同;
- **性质 3** 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同。

注：（1）矩阵合同与数域有关。（2）经非退化线性替换, 新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的。

二次型的等价

（1）数域 P 上两个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\,(\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}\,(\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B})$，如果存在一个非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ （$\boldsymbol{C}$ 是数域 P 上的 $n\times n$ 可逆矩阵），把 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 变成 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$, 那么称二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 等价, 记作 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\cong\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 。

（2）数域 P 上两个 n 元二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\,(\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A})$ 与 $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}\,(\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B})$ 等价当且仅当它们的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在数域 P 上合同。

（3）数域 P 上任一 n 元二次型都等价于一个只含平方项的二次型。

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

二次型及其矩阵表示

二次型的标准形与规范形

2 典型例题

知识点 1: 二次型的矩阵与秩的求法

知识点 2: 化二次型为标准形

知识点 3: 化复、实二次型为规范形

知识点 4: 正定、半正定二次型的判别

知识点 5: 矩阵合同的证明

（1）标准形的定义: 只包含平方项的二次型

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2 \tag{3}$$

称为**标准形**, 式 (3)中 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 里不等于零的数的个数等于标准形(3) 的**秩**, 标准形(3)的矩阵为**对角矩阵** $\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$。

（2）数域 P 上任意一个二次型都可以经过数域 P 上的非退化线性替换变成标准形。

（3）数域 P 上任意一个对称矩阵在数域 P 上都合同于一个对角矩阵。

化二次型为标准形的方法：配方法

情形 1 如果二次型(1) 含 x_i 的平方项, 就集中所有含 x_i 的交叉项, 然后与 x_i^2 配方, 按下列公式

$$ax_i^2 + bx_i = a\left(x_i + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} \tag{4}$$

配成完全平方, 式 (4)中, a 为二次型(1)中 x_i^2 的系数, b 为二次型 (1) 中所有含 x_i 的交叉项提出 x_i 后的和, 之后做非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \cdots\cdots \\ y_{i-1} = x_{i-1} \\ y_i = x_i + \frac{b}{2a} \\ y_{i+1} = x_{i+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}, \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \cdots\cdots \\ x_{i-1} = y_{i-1} \\ x_i = y_i - \frac{b}{2a} \\ x_{i+1} = y_{i+1} \\ \cdots\cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

就将 n 元二次型 (1)化成一个平方项加上一个关于 $y_1, y_2, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_n$ 的 $n-1$ 元二次型。如果这个 $n-1$ 元二次型有平方项, 重复上述过程, 就将其化成一个平方项加上一个 $n-2$ 元二次型, 否则转情形 2 。

情形 2 如果二次型(1) 不含平方项, 设 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$, 则可先做非退化线性替换

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \\ x_k = y_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n; k \neq i, j) \end{cases}$$

把 n 元二次型 (1) 化成一个含平方项 y_i^2 的二次型, 再转到情形 1 , 如此下去有限步后就将二次型 (1) 用非退化线性替换化为标准形。

第一步:

写出二次型(1)的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 并构造 $2n \times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$ 。

第二步:

对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$ 施行初等列变换, 并对 $\boldsymbol{A}$ 施行同样的初等行变换, 即**合同变换**, 把 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}_n$ 化为可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 此时 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ 。

第三步:

写出非退化线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 化二次型为标准形 $f = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}$ 。

1）复二次型规范形的定义

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个复二次型, 经过一适当的复数域上的非退化线性替换后, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变成**标准形**

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2, \quad d_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

其中， r 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩, 再做复数域上一非退化线性替换

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r = \frac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n = z_n \end{array}\right. \tag{5}$$

式(5)就变成

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2 \tag{6}$$

式 (6)称为复二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**规范形**, 它完全被复二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩所决定。

2）实二次型规范形的定义

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个实二次型, 经过一适当的实数域上的非退化线性替换后, 可使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变成**标准形**

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2 \tag{7}$$

式(7) 中的 $d_i>0, i=1,2,\cdots,r,r$ 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩。再做实数域上一非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r=\frac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases}$$

式 (7) 就变成

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2 \tag{8}$$

式 (8)称为实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**规范形**。

规范形式 (8)完全被 r, p 这两个数所决定, $p, r-p$ 与 $p-(r-p)=2p-r$ 分别称为实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**正、负惯性指数**与 **符号差**。

3）唯一性

任一复二次型, 经过一适当的复数域上的非退化线性替换可以变成规范形, 且规范形是唯一的, 由原复二次型的秩唯一确定;

任一实二次型, 经过一适当的实数域上的非退化线性替换可以变成规范形, 且规范形是唯一的。(后者称为惯性定理。)

（1）任一复数对称矩阵合同于一个形式为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的对角矩阵, r 为该复数对称矩阵的秩, 且 r 可以为零, 从而有两个复数对称矩阵在复数域上合同的充分必要条件是它们的秩相等, 因此**两个复二次型等价当且仅当它们的规范形相同, 当且仅当它们的秩相同**。

（2）任一实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都合同于一个下述形式的对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \tag{9}$$

矩阵式(9) 的主对角线上 1 的个数 p 及 -1 的个数 $r-p$ （r 等于 A 的秩）都是唯一确定的, 分别称为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及实二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的正、负惯性指数, 它们的差 $2p-r$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的符号差。**两个实对称矩阵在实数域上合同当且仅当它们有相同的秩和正惯性指数, 两个实二次型等价当且仅当它们的秩相等, 而且正惯性指数也相同**。

（3）任何一个 n 级可逆复对称矩阵必合同于以下形式的矩阵之一:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} (n=2r), \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} (n=2r+1)$$

（4）任何一个 n 级可逆实对称矩阵必合同于以下形式的矩阵之一:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}$$

正、负定二次型的定义

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个**实二次型**, 如果对于任意一组**不全为零的实数** $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$, 就称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为**正定**的；

如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$, 那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为**负定**的；

如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geqslant 0$, 那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为**半正定**的；

如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leqslant 0$, 那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为**半负定**的；

如果实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 既不是半正定又不是半负定, 那么它就称为**不定**的。

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定的、负定的、半正定的、半负定的, 如果实二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定的、负定的、半正定的、半负定的。

正定二次型（正定矩阵）的判别

设 A 是 n 级实对称矩阵。

(1) 实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是**正定**的当且仅当它的正惯性指数等于 n 。

(2) 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 是正定的当且仅当

$$d_i>0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(3) $\boldsymbol{A}$ 是正定的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n$ 在 $\mathbf{R}$ 上合同。

(4) $\boldsymbol{A}$ 是正定的当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零。

(5) $\boldsymbol{A}$ 是正定的当且仅当有**可逆实矩阵** $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 。

(6) $\boldsymbol{A}$ 是正定的当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式全大于零。

(7) $\boldsymbol{A}$ 是正定的当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是正的。

负定二次型（负定矩阵）的判别

实二次型 $X'AX$ （实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$）是**负定**的当且仅当实二次型 $-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ （实对称矩阵 $-\boldsymbol{A}$) 是正定的。

(1) 实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是负定的当且仅当它的负惯性指数等于 n 。

(2) 实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 是负定的当且仅当 $d_i < 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$

(3) $\boldsymbol{A}$ 是负定的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{E}_n$ 在 $\mathbf{R}$ 上合同。

(4) $\boldsymbol{A}$ 是负定的当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇数级顺序主子式都小于零, 偶数级顺序主子式都大于零。

(5) $\boldsymbol{A}$ 是负定的当且仅当有可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 。

(6) $\boldsymbol{A}$ 是负定的当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是负的。

半正定二次型（半正定矩阵）的判别

(1) 实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是**半正定**的当且仅当它的正惯性指数与秩相等。

(2) 实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 是半正定的当且仅当

$$d_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(3) $\boldsymbol{A}$ 是半正定的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 在 $\mathbf{R}$ 上合同，其中 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。

(4) $\boldsymbol{A}$ 是半正定的当且仅当有 $n \times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 。

(5) $\boldsymbol{A}$ 是半正定的当且仅当矩阵 A 的特征值全大于等于零。

实二次型 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ (实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$) 是半负定的当且仅当实二次型 $-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ （实对称矩阵 $-\boldsymbol{A}$) 是半正定的。

(1) 实二次型 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 是半负定的当且仅当它的负惯性指数与秩相等。

(2) 实二次型 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=d_1 x_1^2+d_2 x_2^2+\cdots+d_n x_n^2$ 是半负定的当且仅当

$$d_i \leqslant 0 \quad (i=1,2, \cdots, n)$$

(3) $\boldsymbol{A}$ 是半负定的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} -\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 在 $\mathbf{R}$ 上合同, 其中 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。

(4) $\boldsymbol{A}$ 是半负定的当且仅当有 $n \times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 。

(5) $\boldsymbol{A}$ 是半负定的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全小于等于零。

注：

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, k 是正实数, m 是正整数, 则 $k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵。

(2) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为正定矩阵, 则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 也是正定矩阵。

内容概要

例 5.1 设 $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - x_3^2$, 求 f 的矩阵, 并求 f 的秩。

解: f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

因为 $r(\boldsymbol{A}) = 3$, 所以二次型 f 的秩为 3 。

例 5.2 设实二次型
$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\sum_{i=1}^s\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)^2=\sum_{i=1}^s\left(a_{i1} x_1+a_{i2} x_2+\cdots+a_{in} x_n\right)^2$ 。证明:
$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{sn}$ 的秩。

证明：令

$$\left\{\begin{array}{c}
y_1=a_{11} x_1+a_{12} x_2+\cdots+a_{1n} x_n \\
y_2=a_{21} x_1+a_{22} x_2+\cdots+a_{2n} x_n \\
\cdots \cdots \\
y_s=a_{s1} x_1+a_{s2} x_2+\cdots+a_{sn} x_n
\end{array}\right.$$

有

$$\left(\begin{array}{c}
y_1 \\
y_2 \\
\vdots \\
y_s
\end{array}\right)=\boldsymbol{A}\left(\begin{array}{c}
x_1 \\
x_2 \\
\vdots \\
x_n
\end{array}\right)$$

于是

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\sum_{i=1}^{s} y_i^2=\left(y_1, y_2, \cdots, y_s\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{array}\right)$$

$$=\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\left(\boldsymbol{A}' \boldsymbol{A}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right)$$

因为 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 的矩阵, 且 $r\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)=r(\boldsymbol{A})$, 于是

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \text{的秩}=r\left(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\right)=r(\boldsymbol{A})$$

内容概要

(1) 合同变换法

例 5.3 求一个非退化线性替换, 将 3 元二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ 化成标准形。

解: 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \hline \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_2+c_1]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$
\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}c_1+c_2\\ \frac{1}{2}c_1+c_3}]{\substack{-\frac{1}{2}r_1+r_2\\ \frac{1}{2}r_1+r_3}}
\left(\begin{array}{ccc}
2 & 0 & 0\\
0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\
0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\
\hdashline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\
0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[-3c_2+c_3]{-r_2+r_3}
\left(\begin{array}{ccc}
2 & 0 & 0\\
0 & -\frac{1}{2} & 0\\
0 & 0 & 4\\
\hdashline
1 & -\frac{1}{2} & 2\\
1 & \frac{1}{2} & -1\\
0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 4\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$ 。

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ ，即

$$
\begin{cases}
x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2+2y_3\\
x_2=y_1+\frac{1}{2}y_2-y_3\\
x_3=y_3
\end{cases}
\tag{10}
$$

式 (10) 是一个非退化线性替换，将其代入原二次型可得其标准形

$$
\begin{aligned}
f = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}) \\
&= \boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{Y} \\
&= \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y} \\
&= 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 4y_3^2
\end{aligned}
$$

注：当二次型的矩阵主对角线元素都为零时, 不能采用换列和换行的方法将主对角线上第一个元素化为非零元, 而应该在第一步采用将其他某列和相应的行分别加到第 1 列、第 1 行的方法, 例如该例就是在第一步中将二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列、第 2 行加到第 1 行。

（2）配方法

例 5.4 用非退化线性替换化 3 元二次型 $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$ 为标准形。

$$
\begin{aligned}
f = & \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2}_{\text{这是一个含有平方项的 3 元二次型, 将其按} x_1 \text{ 进行配方}} \\
= & \left(x_1^2 + 2x_2x_1\right) + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\
= & \underbrace{(x_1 + x_2)^2}_{\text{这是一个平方项}} + \underbrace{2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2}_{\text{这是一个不含} x_1 \text{ 的2 元二次型, 它有平方项，将其按} x_2 \text{ 进行配方}} \\
= & (x_1 + x_2)^2 + \left(2x_2^2 + 2x_3x_2\right) + 2x_3^2 \\
= & (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2}_{\text{这是一个平方项}} + \underbrace{\frac{3}{2}x_3^2}_{\text{这是一个 1 元二次型}}
\end{aligned}
$$

由于上面依次按 x_1, x_2 进行配方, 因此令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

为所用的非退化线性替换, 将其代入原二次型可得其标准形

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2$$

例 5.5 化 3 元二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形, 并求所用的非退化线性替换的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 。

解: 因为 f 中不含有平方项, 所以令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{C}_1\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

代入 f 中, 得

$$\begin{aligned} f &= 2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3 \\ &= 2\left(y_1+y_2\right)\left(y_1-y_2\right)+2\left(y_1+y_2\right)y_3-6\left(y_1-y_2\right)y_3 \\ &= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 \end{aligned}$$

再配方

$$
\begin{aligned}
f &= \left(2y_1^2 - 4y_1y_3\right) - 2y_2^2 + 8y_2y_3 \\
&= 2\left(y_1 - y_3\right)^2 + \left(-2y_2^2 - 2y_3^2 + 8y_2y_3\right) \\
&= 2\left(y_1 - y_3\right)^2 + \left(\left(-2y_2^2 + 8y_2y_3\right) - 2y_3^2\right) \\
&= 2\left(y_1 - y_3\right)^2 + \left(-2\left(y_2 - 2y_3\right)^2 + 6y_3^2\right) \\
&= 2\left(y_1 - y_3\right)^2 - 2\left(y_2 - 2y_3\right)^2 + 6y_3^2
\end{aligned}
$$

令 $\left\{\begin{array}{ll} z_1 = & y_1 - y_3 \\ z_2 = & y_2 - 2y_3 \\ z_3 = & y_3 \end{array}\right.$，即 $\left\{\begin{array}{ll} y_1 = & z_1 + z_3 \\ y_2 = & z_2 + 2z_3 \\ y_3 = & z_3 \end{array}\right.$，亦即 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则二次型 f 化成标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$，所用的非退化线性替换的系数矩阵为

$$
\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

内容概要

例 5.6 化 3 元复二次型 $f = 2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + {x_2}^2 + 3{x_3}^2$ 为规范形。

解: 由

$$
\begin{aligned}
f &= \left(2x_1^2 + 4x_1x_2\right) + {x_2}^2 + 3{x_3}^2 \\
&= 2\left(x_1 + x_2\right)^2 - {x_2}^2 + 3{x_3}^2 \\
&= \left(\sqrt{2}\left(x_1 + x_2\right)\right)^2 + \left(\mathrm{i}x_2\right)^2 + \left(\sqrt{3}x_3\right)^2
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{cases} y_1 = \sqrt{2}(x_1 + x_2) \\ y_2 = \mathrm{i}x_2 \\ y_3 = \sqrt{3}x_3 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \mathrm{i}y_2 \\ x_2 = -\mathrm{i}y_2 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \end{cases}
$$

则 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ 为规范形。

例 5.7 化 3 元实二次型 $f=2{x_1}^2+4x_1x_2+{x_2}^2+3x_3^2$ 为规范形, 并求其正、负惯性指数。

解: 由

$$\begin{aligned} f &= \left(2x_1^2+4x_1x_2\right)+x_2^2+3x_2^2 \\ &= 2\left(x_1+x_2\right)^2-x_2^2+3x_3^2 \\ &= \left(\sqrt{2}\left(x_1+x_2\right)\right)^2-x_2^2+\left(\sqrt{3}x_3\right)^2 \end{aligned}$$

令 $\left\{\begin{array}{l} y_1=\sqrt{2}\left(x_1+x_2\right) \\ y_2=\sqrt{3}x_3 \\ y_3=x_2 \end{array}\right.$, 即 $\left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-y_3 \\ x_2=y_3 \\ x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_2 \end{array}\right.$

则

$$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

为规范形, 且正惯性指数 $p=2$, 负惯性指数 $q=1$ 。

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

二次型及其矩阵表示

二次型的标准形与规范形

2 典型例题

知识点 1: 二次型的矩阵与秩的求法

知识点 2: 化二次型为标准形

知识点 3: 化复、实二次型为规范形

知识点 4: 正定、半正定二次型的判别

知识点 5: 矩阵合同的证明

例 5.8 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=n$, 证明: $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

证明: 先证明 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵。事实上因 $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$, 又 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵。令 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})$$

任取不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 令 $\boldsymbol{X}_c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$, $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_c=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_c\in\mathbf{R}^n$, 而实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=n$, 所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_c=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'\neq(0,0,\cdots,0)'$, 故

$$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\boldsymbol{X}_c'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_c=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_c)'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_c)=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2>0$$

所以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$ 是正定二次型, 故 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

例 5.9 判别 3 元实二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性。

解: 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$, 其一级顺序主子式 $a_{11}=-5<0$, 二级顺序主子式 $\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=30-4=26>0$, 三级顺序主子式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}=-80<0$, 可知 $\boldsymbol{A}$ 不是正定矩阵, 因此 f 不是正定二次型。

例 5.10 当 λ 为何值时, 3 元实二次型 $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + \lambda x_3^2$ 为正定二次型。

解: f 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$, f 正定当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式皆大于零, 即

$$|a_{11}| = |1| = 1 > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \end{vmatrix} > 0$$

得 $\lambda - 5 > 0$, 即 $\lambda > 5$ 。 故当 $\lambda > 5$ 时, f 为正定二次型。

例 5.11 设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 m 级实方阵, $\boldsymbol{D}$ 为 n 级实方阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 实矩阵。证明: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵。

证明: 设 $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$, 因为 $\boldsymbol{G}$ 正定, 所以 $\boldsymbol{G}$ 是实对称矩阵, 于是 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$, 因此 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}', \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}$, 推出 $(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵。又由于 $\boldsymbol{G}$ 正定, 故 $\boldsymbol{G}$ 的 1 到 m 级顺序主子式均大于零, 而 $\boldsymbol{G}$ 的 1 到 m 级顺序主子式恰为 $\boldsymbol{A}$ 的 1 到 m 级顺序主子式, 故 $\boldsymbol{A}$ 正定。任取 $\boldsymbol{O} \neq \boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^n$, 有 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}$ 。因为 $\boldsymbol{G}$ 正定, 所以 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}' \boldsymbol{G} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y} > 0$, 知 $\boldsymbol{D}$ 正定。因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix},$$ 即

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 所以 $\boldsymbol{G}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 合同, 而 $\boldsymbol{G}$ 正定, 因此 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 正定。

于是任取$\mathbf{0} \neq \boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^n$, 有 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}$, 且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{Y} > 0$$

故 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 正定。

例 5.12 (中山大学, 2003 年) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 n 级实方阵, 若矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 是正定的, 证明: $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}'$ 也正定。

证明: 设 $\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$, 因为 $\boldsymbol{H}$ 正定, 所以

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}' \end{pmatrix}$$

推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}',\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}$, 因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 都是实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{H}$ 的 1 到 n 级顺序主子式均大于零, 而 $\boldsymbol{H}$ 的 1 到 n 级顺序主子式恰为 $\boldsymbol{A}$ 的 1 到 n 级顺序主子式, 故 $\boldsymbol{A}$ 正定 (因此可逆), 于是 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}'$ 是实矩阵, 且 $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}')'=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}'$, 知 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}'$ 是实对称矩阵。

令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$, 那么$\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$, 进而有

$$\boldsymbol{P}'\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}' \end{pmatrix}$$

知 $\boldsymbol{H}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}' \end{pmatrix}$ 合同, 而 $\boldsymbol{H}$ 正定, 所以 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}' \end{pmatrix}$ 也正定, 因此任取 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^n$, 有 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{O}$, 且

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Y}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}'\left(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}'\right)\boldsymbol{Y} > 0$$

故 $\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}A^{-1}\boldsymbol{B}'$ 正定。

例 5.13（清华大学, 2000 年）设 n 级实方阵 $\boldsymbol{A}$ 如下, 试求 b 的取值范围, 使得 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b+8 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & b & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & b & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & b \end{pmatrix}$$

解: 本题实际上是一个行列式的计算问题。因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式皆大于零, 而 $\boldsymbol{A}$ 的 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 级顺序主子式

$$
\begin{aligned}
D_k &= \begin{vmatrix} (b-1)+9 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0+3 & b & 1 & \cdots & 1 \\ 0+3 & 1 & b & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0+3 & 1 & 1 & \cdots & b \end{vmatrix} \\
&= (b-1)\begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & b & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & b & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1 & b & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & b \end{vmatrix} \\
&= (b+k-2)(b-1)^{k-1} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-1 \end{vmatrix} \\
&= (b+k-2)(b-1)^{k-1} + 9(b-1)^{k-1} = (b+k+7)(b-1)^{k-1}
\end{aligned}
$$

（1）k 为奇数, $b>-8$ 且 $b \neq 1$ 时, $D_k>0$ 。

（2）k 为偶数, $\left\{\begin{array}{l} b-1>0 \\ b+k+7>0 \end{array}\right.$ 或 $\left\{\begin{array}{l} b-1<0 \\ b+k+7<0 \end{array}\right.$, 即 $b>1$ 或 $b<-k-7$ 时, $D_k>0$ 。

以上两种情形都要满足才有 $\boldsymbol{A}$ 正定, 所以只有当 $b>1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

例 5.14 证明: n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的充分必要条件为有 n 级可逆实对称矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^2$ 。

证明: 充分性: 首先 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵, 又 $\boldsymbol{C}$ 是 n 级可逆实对称矩阵, 所以任取 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^n$, 令 $\boldsymbol{CY}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$, 则 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{CY}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'\in\mathbf{R}^n$, 于是

$$\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{CY})'(\boldsymbol{CY})=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2>0$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是正定的。

必要性: 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 因此必存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{U} \tag{11}$$

式(11)中的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 它们都大于零, 进而有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{U} \tag{12}$$

令

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}' \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{U} \tag{13}$$

那么式(13)中的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是可逆实对称矩阵, 将 $\boldsymbol{C}$ 代入到式 (11) 中, 有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^2$

注：令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都大于零, 所以 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵。

由式 (13)知 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在实数域上合同, 因此 $\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵。

由此得出结论：如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵, 那么存在 n 级正定矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^2$。

例 5.15 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 级可逆实矩阵, 证明: 存在一个正定矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和一个正交矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}$ 。

证明：由例 5.8 知 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

由例 5.14 的注知, 存在 n 级正定矩阵 $\boldsymbol{S}$, 使得 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^2$, 因此
$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{S}^2=\Big((\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{S}\Big)\boldsymbol{S}$ 。

下面证明 $(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{S}$ 是正交矩阵。

令 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{S}$, 则 $\boldsymbol{U}$ 是 n 级实矩阵, 又

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'=(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}'\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}_n$$

所以 $\boldsymbol{U}$ 是正交矩阵, 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}$ 。

例 5.16 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵当且仅当存在 n 级实矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$ 正定。

证明: **必要性**: 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 那么 $\boldsymbol{B}$ 是 n 级实矩阵, 且有

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{-1}+\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{-1}+\left(\boldsymbol{A}'\right)^{-1}\boldsymbol{A}'=2\boldsymbol{E}_n$$

所以 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$ 正定。

充分性: 用反证法。若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 取一非零解 $\boldsymbol{X}_0$, 有

$$\boldsymbol{X}_0'\left(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}_0=\left(\boldsymbol{AX}_0\right)'\boldsymbol{BX}_0+\left(\boldsymbol{BX}_0\right)'\boldsymbol{AX}_0=0$$

这与 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}$ 正定矛盾, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆。

例 5.17 （华中科技大学, 2012 年）设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 级实对称矩阵, 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 半正定, 证明: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 半正定，若还有 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也正定。

证明：任取 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$, 由 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 半正定, 所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵, 推出 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \geqslant 0, \boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} \geqslant 0$, 因此 $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X} \geqslant 0$, 知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 半正定。

若还有 $\boldsymbol{A}$ 正定, 那么 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$, 因此

$$\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} > 0$$

从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定。

内容概要

例 5.18 证明: 实对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ 与单位矩阵在实数域上合同的充分必要条件是每个 $a_i>0$ 。

证明: **必要性**: 因实对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}_n$ 在实数域上合同, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 因此对 n 维单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'(i=1,2,\cdots,n)$, 有 $\boldsymbol{\varepsilon}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=a_i>0$ 。

充分性: 因为每个 $a_i>0$, 所以取 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{a_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{a_n}} \end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{C}$ 为可逆实矩阵, 且有 $\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}_n$ 在实数域上合同。

例 5.19 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&4&3\\4&5&3\\3&3&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&-6\\0&1&0\\-6&0&9\end{pmatrix}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在实数域上合同, 并求一可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 。

证明:

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{E}_3}\right)=\begin{pmatrix}5&4&3\\4&5&3\\3&3&2\\\frac{1}{0}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\\hdashline\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{4}{3\sqrt{5}}&-\frac{1}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{E}_3}\right)=\left(\begin{array}{ccc}4&0&-6\\0&1&0\\-6&0&9\\\hdashline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\\hdashline\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在实数域上都与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 合同, 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在实数域上合同。令 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 有 $\boldsymbol{P}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2'\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
所以

$$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{P}_2^{-1}\right)' \boldsymbol{P}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1} = \left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\right)' \boldsymbol{A} \left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\right),$$

推出

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{9+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 5.20 证明：任何一个 n 级可逆复对称矩阵必合同于以下形式的矩阵之一:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} (n = 2r), \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} (n = 2r + 1)$$

证明：设 A 是任一 n 级可逆复对称矩阵。由于复数域上两个 n 级对称矩阵合同的充要条件是它们有相同的秩, 而当 $n = 2r$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = n$, 因此, 此时 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。

当 $n = 2r + 1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix} = n$, 因此, 此时 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix}$。

例 5.21 任何一个 n 级可逆实对称矩阵必合同于以下形式的矩阵之一:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}$$

证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 n 级可逆实对称矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A}) = n$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 合同于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-p} \end{pmatrix} \text{(其中}p\text{ 为正惯性指数)}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 的符号差 $s = p - (n-p) \geqslant 0$ 时, 设 $n - p = r (\geqslant 0)$, 正惯性指数 $p = r + (n - 2r)$, 由于 $n - 2r = (n - r) - r = p - (n - p) \geqslant 0$, 所以此时 $\boldsymbol{A}$ 也合同于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 的符号差 $s=p-(n-p)\leqslant 0$ 时, 设 $p=r(\geqslant 0)$, 得

$$n-p=n-r=r+(n-2r),\ 且 n-2r=(n-p)-p\geqslant 0$$

所以此时 $\boldsymbol{A}$ 也合同于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{E}_{n-p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{E}_r & 0 \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{E}_r \\ -\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{E}_r \end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{P}$ 是可逆实矩阵, 且

$$\boldsymbol{P}'\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_r \end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

所以存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}$, 使

$$\boldsymbol{Q}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-2r} \end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 合同于以上两种形式的矩阵之一。