# 高等代数选讲
# Selection of Advanced Algebra

## 第六讲：线性空间
## Lecture 6: Linear Spaces

主讲教师：艾武

数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics
**桂林理工大学**
Guilin University of Technology

# 内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、线性空间的概念与判别

二、基、维数与坐标的概念与求法

三、基变换与坐标变换

四、子空间的定义与判别以及子空间的交与和

五、子空间的直和

六、线性空间同构

2 典型例题

知识点 1: 线性空间的判别

知识点 2: 子空间的判别

知识点 3: 线性空间与其子空间的基和维数的求法

知识点 4: 齐次线性方程组的反问题

知识点 5: 子空间的交与和

知识点 6: 维数公式的应用

知识点 7: 子空间的直和

知识点 8: 线性空间同构

# 内容概要

# （一）线性空间的定义

设 $V$ 是一个**非空集合**, $P$ 是一个**数域**。在集合 $V$ 的元素之间定义一种称为**加法**的代数运算, 使得对于 $V$ 中任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$, 在 $V$ 中都有唯一确定的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与它们对应, 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 。在数域 $P$ 与集合 $V$ 的元素之间还定义了一种运算, 称为**数量乘法**。这就是说, 对于数域 $P$ 中任一个数 $k$ 与 $V$ 中任一个元素 $\boldsymbol{\alpha}$, 在 $V$ 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应, 称为 $k$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积, 记为 $\boldsymbol{\delta} = k\boldsymbol{\alpha}$ 。如果加法与数量乘法**满足下述规则**, 那么 $V$ 称为数域 $P$ 上的**线性空间**。

加法满足下面四条规则:

(1) $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$ 。

(2) $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$ 。

(3) 在 $V$ 中有一个元素 $\mathbf{0}$, 使得对 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 都有 $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$ （具有这个性质的元素 $\mathbf{0}$ 称为 $V$ 的**零元素**）。

(4) $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ （$\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负元素**）。

数量乘法满足下面两条规则:

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ 。

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$

数量乘法与加法满足下面两条规则:

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$ 。

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$ 。

在以上规则中, $k,l$ 表示数域 $P$ 中任意数; $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 表示 $V$ 中任意元素。

注：线性空间中的元素也称为**向量**。

# （二）线性空间的判别

（1）笛卡儿积: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是任意两个非空集合, 将集合 $\{(a, b) \mid a \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{B}\}$ 称为集合 $\boldsymbol{A}$ 与集合 $\boldsymbol{B}$ 的**笛卡儿积**, 记为 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 。

（2）判定或证明一个非空集合 $V$ 对所给的运算构成数域 $P$ 上的线性空间, 首先要验证所给的加法和数量乘法符合线性空间定义中**加法**和**数乘运算**的定义, 即需要验证给定的加法是 $V \times V$ 到 $V$ 的映射, 数量乘法是 $P \times V$ 到 $V$ 的映射, 其次要验证所给的加法和数量乘法满足线性空间定义中的 **8 条规则**。

（3）判定 $V$ 不是数域 $P$ 上的线性空间, **只需指出不符合线性空间定义中的某一条**。比如给定的加法或数量乘法不符合线性空间定义中加法和数量乘法的定义, 即给定的加法不是 $V \times V$ 到 $V$ 的映射或给定的数量乘法不是 $P \times V$ 到 $V$ 的映射, 或给定的加法和数量乘法不满足 8 条规则中的某一条, 并且只需通过具体例子说明即可。

# （三）常见线性空间举例

(1) $P^n$: 数域 $P$ 上 $n$ 维行（或列）向量的全体, 按通常的向量加法和数与向量的乘法, 构成的数域 $P$ 上的线性空间。

(2) $P^{m\times n}$: 数域 $P$ 上 $m \times n$ 矩阵的全体, 按通常矩阵的加法和数与矩阵的乘法, 构成的数域 $P$ 上的线性空间。

(3) $P[x]$: 数域 $P$ 上一元多项式的全体, 按通常的多项式的加法和多项式的乘法, 构成的数域 $P$ 上的线性空间。

(4) $P[x]_n$: 数域 $P$ 上次数小于 $n$ （$n$ 为正整数）的多项式全体, **再添上零多项式**, 按通常的多项式的加法与多项式的乘法, 构成的数域 $P$ 上的线性空间。

(5) $P$: 数域 $P$ 按数的加法与乘法构成数域 $P$ 上的线性空间。复数域 $\mathbf{C}$ 按数的加法和乘法构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间, 也构成复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间。

# 内容概要

## （一）基与维数的定义

数域 $P$ 上线性空间 $V$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, $V$ 中任意一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为 $V$ 的一组**基**（或**基底**）, 并称 $V$ 为 $n$ 维线性空间, 此时 $V$ 是有限维的。

若在线性空间 $V$ 中可以找到任意多个线性无关的向量, 则称 $V$ 是无**限维线性空间**; 若 $V$ 只含有零向量, 则称 $V$ 为**零空间**。

有限维非零线性空间的**维数**就是它的任意一组基所含向量的个数, **零空间的维数为零**。线性空间 $V$ 的维数记为 $\dim V$ 或 $\dim(V)$ 。

(1) 零空间也是有限维线性空间。

(2) $P^n$ 是有限维的, $P[x]$ 是无限维线性空间, 因为对任意自然数 $n, P[x]$ 中的向量组 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 都是线性无关的。

(3) 如果一个线性空间中含有非零向量, 那么它一定含有无限多个向量。

(4) $n(\geqslant 1)$ 维线性空间 $V$ 中任意 $n$ 个线性无关的向量都构成 $V$ 的一组基, 而且 $V$ 中任意 $r$ 个线性无关向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r(r < n)$ 都可以扩充成 $V$ 的一组基。

(5) 一个有限维非零线性空间的基不是唯一的。

(6) 有限维非零线性空间 $V$ 中任意一个向量都可以由基向量组唯一线性表出, 由此可以得 $n \geqslant 1)$ 维向量空间 $V$ 中, 任意 $n+1$ 个向量必线性相关。

(7) 如果数域 $P$ 上的非零线性空间 $V$ 是有限维的, 那么 $V$ 的任意两组基所含向量的个数相等。

## （二）一些常见的线性空间的基与维数

（1） $P^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in P(i=1,2,\cdots,n)\}$ 是数域 $P$ 上的 $n$ 维线性空间, 且 $P^n$ 中下列向量组（即 $P^n$ 中的单位向量构成的向量组）：

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\ \varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\ \cdots,\ \varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$$

是 $P^n$ 的一组基, 此基也称为 $P^n$ 的**标准基**（或**自然基**）。

（2） 设 $n$ 为正整数, 那么 $P[x]_n=\left\{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\mid a_i\in P(i=0,1,2,\cdots,n-1)\right\}$ 是数域 $P$ 上的 $n$ 维线性空间, 且

$$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$$

是 $P[x]_n$ 的一组基。

（3）$P^{m\times n}=\left\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}\mid a_{ij}\in P(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\right\}$ 是数域 $P$ 上的 $mn$ 维线性空间, 且设

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，那么 $\boldsymbol{E}_{11},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{21},\cdots,\boldsymbol{E}_{2n},\cdots,\boldsymbol{E}_{m1},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$ 是 $P^{m\times n}$ 的一组基。

## （三）线性空间的基、维数及向量坐标的求法

### 1 . 线性空间的基与维数的求法

设 $V$ 是数域 $P$ 上一个非零线性空间, 任取 $V$ 中的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 尝试将其表示成若干个固定向量比如 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合, 再判别 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是否线性无关。

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 就是 $V$ 的一组基, $n$ 就是 $V$ 的维数;

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 求出 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组, 就得到 $V$ 的一组基, 该基所含向量的个数就是 $V$ 的维数;

如果能够看出 $V$ 中有任意多个线性无关的向量, 那么 $V$ 是无限维线性空间。

## 2. 向量的坐标

### （1）向量坐标的定义:

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $V$ 中任一向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以被基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

表出系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是被 $\boldsymbol{\alpha}$ 与基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一确定的, 这组数就称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**, 记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 。

### （2）向量坐标的求法:

向量坐标的求法主要有两种, 其一是**待定系数法**（也就是用向量坐标的定义）, 其二是利用**坐标变换公式**。

# 内容概要

# （一）过渡矩阵的定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的两组基, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\
&\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\beta}_n &= a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n
\end{aligned}
$$

则 $n$ 级矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的**过渡矩阵**, 它是可逆的, 并记

$$
(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\, \boldsymbol{A}
$$

## （二）过渡矩阵的求法

**方法 1：直接用定义。**

分别求出 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标, 再分别以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为第 1 列、第 2 列 $\cdots\cdots$ 第 $n$ 列构成矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ 就是所求。

**方法 2：将两组基分别与第三组简单的基相联系。**

例如, 求 $\mathbf{R}^n$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到另一组基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵, 可以取 $\mathbf{R}^n$ 的单位向量组成的基:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)(i = 1, 2, \cdots, n)$$

容易求得 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 分别到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与到 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 即容易建立下列关系式:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\, \boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\, \boldsymbol{B}$$

于是

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\, \boldsymbol{A}^{-1}$$

进而得

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$$

这里 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 即为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵。

设数域 $P$ 上的 $n$ 维线性空间 $V$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $V$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 在 $V$ 的另一组基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标是 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $\boldsymbol{A}$ 是由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵, 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# 内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、线性空间的概念与判别

二、基、维数与坐标的概念与求法

三、基变换与坐标变换

四、子空间的定义与判别以及子空间的交与和

五、子空间的直和

六、线性空间同构

2 典型例题

知识点 1: 线性空间的判别

知识点 2: 子空间的判别

知识点 3: 线性空间与其子空间的基和维数的求法

知识点 4: 齐次线性方程组的反问题

知识点 5: 子空间的交与和

知识点 6: 维数公式的应用

知识点 7: 子空间的直和

知识点 8: 线性空间同构

# （一）子空间的定义

令 $W$ 是数域 $P$ 上线性空间 $V$ 的一个非空子集。如果 $W$ 对 $V$ 的两种运算也构成数域 $P$ 上的线性空间, 那么就称 $W$ 是 $V$ 的一个**线性子空间**（简称**子空间**)。

如果 $W$ 是 $V$ 的子空间，且 $W \neq V$, 就称 $W$ 是 $V$ 的**真子空间**。

注:

（1）若 $W$ 是有限维线性空间 $V$ 的子空间, 则 $\dim W \leqslant \dim V$ 。

（2）在线性空间 $V$ 中, 由单个零向量所组成的集合是 $V$ 的一个子空间, $V$ 本身也是 $V$ 的一个子空间, 这两个子空间称为 $V$ 的**平凡子空间**，而其他子空间（如果存在）都称为 $V$ 的**非平凡子空间**。

## （二）子空间的判别方法

（1）**子空间的判别定理**：设 $W$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的一个非空子集，那么下列条件等价:

1) $W$ 是 $V$ 的子空间;
2) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W, \forall k \in P$, 有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in W, k\boldsymbol{\alpha} \in W$;
3) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W, \forall k, l \in P$, 有 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta} \in W$ 。

（2）设 $W$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的一个非空子集，要证明 $W$ 不是 $V$ 的子空间，只需说明存在 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0 \in W$, 但 $\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\beta}_0 \notin W$ 或存在 $k_0 \in P, \boldsymbol{\alpha}_0 \in W$ 但 $k_0\boldsymbol{\alpha}_0 \notin W$ 。

注：如果 $W$ 是一个给定的集合，那么要证明 $W$ 是 $V$ 的子空间，首先应该说明 $W$ 是 $V$ 的非空子集，接着验证 $W$ 对 $V$ 的两种运算也构成数域 $P$ 上的线性空间或（1）中的 2）或 3）成立；如果 $W$ 不是 $V$ 的非空子集，那么 $W$ 一定不是 $V$ 的子空间。

## （三）生成子空间

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 中的一组向量, 那么

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r \mid k_1, k_2, \cdots, k_r \in P\}$$

是 $V$ 的子空间, 该子空间称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ **生成的子空间**, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 称为这个子空间的一组**生成元**。

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩就是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ 的维数。

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩等于零， 那么 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ 是 $V$ 的零子空间;

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩大于零, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的任一极大线性无关组都是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$ 的一组基。

# （四）子空间相等的判别

设 $V_1, V_2$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的两个子空间。

(1) $V$ 的生成子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p)$ 与 $L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)$ 相等当且仅当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 等价。

(2) 若 $V_1 \subseteq V_2$, 并且 $V_2 \subseteq V_1$, 则 $V_1 = V_2$ 。

(3) 若 $V_1, V_2$ 是 $V$ 两个有限维子空间, $V_1 \subseteq V_2$, 并且 $\dim V_1 = \dim V_2$, 则 $V_1 = V_2$ 。

设 $W_1, W_2$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的两个子空间。

**（1）子空间的交**: $W_1 \cap W_2$ 是 $V$ 的子空间。

1）设 $k$ 是任一大于 1 的正整数, $\{W_i\}_{i=1}^{k}$ 是 $V$ 的任意一组子空间, 则 $\bigcap_{i=1}^{k} W_i$ 也是 $V$ 的子空间。

2）**两个子空间的并不一定是子空间。**

例如, 取 $\mathbf{R}^2$ 的两个子空间： $W_1 = \{(a,0) \mid a \in \mathbf{R}\}, \quad W_2 = \{(0,b) \mid b \in \mathbf{R}\}$, 那么 $W_1 \cup W_2 = \{(a,0),(0,b) \mid a,b \in \mathbf{R}\}$, 于是 $(1,0),(0,1) \in W_1 \cup W_2$, 但

$$(1,0)+(0,1)=(1,1) \notin W_1 \cup W_2$$

因此 $W_1 \cup W_2$ 不是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间。

3）$W_1 \cup W_2$ 是 $V$ 的子空间当且仅当 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$ 。

4）任何线性空间都不能写成其两个真子空间的并, 即设 $W_1, W_2$ 都是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的真子空间, 那么 $W_1 \cup W_2 \neq V$ 。

**证明**: 由 $W_1 \neq V$ 知, 必存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 但 $\boldsymbol{\alpha} \notin W_1$ 。

若 $\boldsymbol{\alpha} \notin W_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha} \notin W_1 \cup W_2$, 即 $W_1 \cup W_2 \neq V$ 。

若 $\boldsymbol{\alpha} \in W_2$, 则由 $W_2 \neq V$, 存在 $\boldsymbol{\beta} \notin W_2$ 。若 $\boldsymbol{\beta} \notin W_1$, 则 $\boldsymbol{\beta} \notin W_1 \cup W_2$, 得 $W_1 \cup W_2 \neq V$ 。若 $\boldsymbol{\beta} \in W_1$, 则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin W_1 \cup W_2$, 否则当 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W_1$ 时, 有 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta} \in W_1$, 矛盾; 当 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W_2$ 时, 有 $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\alpha} \in W_2$, 矛盾。所以 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin W_1 \cup W_2$, 于是 $W_1 \cup W_2 \neq V$ 。

## （2）子空间的和:

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mid \boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2\}$$

是 $V$ 的子空间, 称为 $W_1$ 与 $W_2$ 的和。

注：子空间的和的概念可以推广, 一切形如 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i \in W_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的向量组成的集合构成 $V$ 的一个子空间, 称为 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 的和, 表示为 $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$, 即

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_i \mid \boldsymbol{\alpha}_i \in W_i, i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

（3）**子空间的交与和的分配律**。

设 $W_1, W_2, W_3$ 都是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的子空间, 则

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) \supseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$$
$$W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$$

注：若 $W_1, W_2, W_3$ 都是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的有限维子空间, 则

$$\dim (W_1 \cap (W_2 + W_3)) \geqslant \dim ((W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3))$$
$$\dim (W_1 + (W_2 \cap W_3)) \leqslant \dim ((W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3))$$

（4）**维数公式**:

设 $V_1, V_2$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的两个有限维子空间, 则

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim (V_1 + V_2) + \dim (V_1 \cap V_2)$$

（5）**生成子空间的交与和的求法**。

设 $V$ 是数域 $P$ 上任一有限维线性空间, 那么 $V$ 的任意一个子空间 $W$ 都是有限维的, 因此 $W$ 可表示为它中某有限个向量的生成子空间, 于是如果 $V_1, V_2$ 是 $V$ 的任意两个子空间, 那么可令

$$V_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p), \quad V_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)$$

进而得

1）$V_1 + V_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p) + L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q) = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q)$ 。

2）由 1）可求得 $V_1 + V_2$ **的基与维数**: $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 的秩就等于 $V_1 + V_2$ 的维数。

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 的秩大于零, 那么它的任一极大线性无关组都是 $V_1 + V_2$ 的基; 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 的秩为零, 那么 $V_1 + V_2$ 的维数为零, $V_1 + V_2 = \{\mathbf{0}\}$ 。

3）**$V_1 \cap V_2$ 的基与维数的求法**：任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} \in V_1 \cap V_2$ 当且仅当存在 $k_1, \cdots, k_p, l_1, \cdots, l_q \in P$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_p\boldsymbol{\alpha}_p = l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_q\boldsymbol{\beta}_q$$

得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_p\boldsymbol{\alpha}_p + l_1\left(-\boldsymbol{\beta}_1\right) + \cdots + l_q\left(-\boldsymbol{\beta}_q\right) = 0$$

即

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, -\boldsymbol{\beta}_1, -\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, -\boldsymbol{\beta}_q\right)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \\ l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_q \end{pmatrix} = 0$$

设 $\dim V = n$, 取定 $V$ 的一组基 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_i &= a_{i1}\boldsymbol{\gamma}_1 + a_{i2}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + a_{in}\boldsymbol{\gamma}_n \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \\ -\boldsymbol{\beta}_j &= b_{j1}\boldsymbol{\gamma}_1 + b_{j2}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + b_{jn}\boldsymbol{\gamma}_n \quad (j = 1, 2, \cdots, q) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, -\boldsymbol{\beta}_1, -\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, -\boldsymbol{\beta}_q) \\ =&(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} & b_{11} & \cdots & b_{q1} \\ a_{12} & \cdots & a_{p2} & b_{12} & \cdots & b_{q2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} & b_{1n} & \cdots & b_{qn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

再令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} & b_{11} & \cdots & b_{q1} \\ a_{12} & \cdots & a_{p2} & b_{12} & \cdots & b_{q2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} & b_{1n} & \cdots & b_{qn} \end{pmatrix}$ 有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, -\boldsymbol{\beta}_1, -\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, -\boldsymbol{\beta}_q) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \\ l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_q \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n)\, \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \\ l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

推出 $\boldsymbol{A}(k_1,\cdots,k_p,l_1,\cdots,l_q)'=\mathbf{0}$, 于是 $(k_1,\cdots,k_p,l_1,\cdots,l_q)'$ 是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots y_q)'=(0,0,\cdots,0)' \tag{1}$$

的解。

反之, 任取齐次线性方程组式 (1) 的一个解 $(t_1,\cdots,t_p,s_1,\cdots,s_q)$, 必有

$$t_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+t_p\boldsymbol{\alpha}_p=s_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+s_q\boldsymbol{\beta}_q$$

令 $\boldsymbol{\beta}=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+t_p\boldsymbol{\alpha}_p=s_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+s_q\boldsymbol{\beta}_q$, 那么必有 $\boldsymbol{\beta}\in V_1\cap V_2$, 于是得到求 $V_1\cap V_2$ 的基与维数的步骤如下。

**第一步**：取 $V$ 的一组基 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n$, 分别求 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, -\boldsymbol{\beta}_1, -\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, -\boldsymbol{\beta}_q$ 在该基下的坐标:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = a_{i1}\boldsymbol{\gamma}_1 + a_{i2}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + a_{in}\boldsymbol{\gamma}_n \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

$$-\boldsymbol{\beta}_j = b_{j1}\boldsymbol{\gamma}_1 + b_{j2}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + b_{jn}\boldsymbol{\gamma}_n \quad (j = 1, 2, \cdots, q)$$

再由 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_p\boldsymbol{\alpha}_p = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + y_q\boldsymbol{\beta}_q \in V_1 \cap V_2$, 得齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} & b_{11} & \cdots & b_{q1} \\ a_{12} & \cdots & a_{p2} & b_{12} & \cdots & b_{q2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} & b_{1n} & \cdots & b_{qn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

**第二步**：求解齐次线性方程组 (2), 如果式 (2)只有零解, 那么 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ 结束; 如果式 (2)有非零解, 求出其一般解转第三步。

**第三步**：将式 (2) 的一般解代入到 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_p\boldsymbol{\alpha}_p = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + y_q\boldsymbol{\beta}_q$ 中, 整理后就将 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成了有限个固定向量不妨设为 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k$ 的线性组合, 那么 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k$ 就是 $V_1 \cap V_2$ 的生成元, $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k$ 的秩就是 $V_1 \cap V_2$ 的维数, $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k$ 的任一极大线性无关组都是 $V_1 \cap V_2$ 的一组基。

注:

（1）如果 $V=P^{n}$, 直接对齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_p\boldsymbol{\alpha}_p+y_1\left(-\boldsymbol{\beta}_1\right)+\cdots+y_q\left(-\boldsymbol{\beta}_q\right)=\mathbf{0} \tag{3}$$

执行第二步、第三步即可, 这相当于在第一步中取 $P^{n}$ 的单位向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j=(0,\cdots,0,1,0\cdots,0) \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

组成的基。

（2）如果 $V=P^{n\times n}$, 由 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_p\boldsymbol{\alpha}_p=y_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+y_q\boldsymbol{\beta}_q$, 再根据矩阵相等就可以得到一个齐次线性方程组, 对该方程组执行第二步、第三步即可, 这相当于在第一步中取 $P^{m\times n}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 。

# 内容概要

# （一）直和的定义及等价条件

## 1）直和的定义

设 $V_1, V_2$ 是线性空间 $V$ 的两个子空间，如果 $V_1 + V_2$ 中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2$$

是唯一的, 这个和就称为**直和**, 记为 $V_1 \oplus V_2$ 。

## 2）直和的等价条件

设 $V_1, V_2$ 是线性空间 $V$ 的子空间, 那么下列条件等价:

- $V_1 + V_2$ 是直和;
- 等式 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = 0, \boldsymbol{\alpha}_i \in V_i (i = 1, 2)$ 只有在 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 全为零向量时才成立, 即 $V$ 的零向量的分解式唯一;
- $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

- $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$ （$V_1,V_2$ 是 $V$ 的有限维子空间）；
- $V_1$ 的基与 $V_2$ 的基合起来恰好是 $V_1+V_2$ 的基（$V_1,V_2$ 是 $V$ 的有限维子空间)。

注：**子空间的直和的概念可以推广到多个子空间的情形**, 即设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是线性空间 $V$ 的子空间, 如果 $V_1+V_2+\cdots+V_s=\sum_{i=1}^{s}V_i$ 中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$$

是唯一的, 那么 $V_1+V_2+\cdots+V_s=\sum_{i=1}^{s}V_i$ 就称为直和, 记为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$, 且下面这些条件是等价的:

- $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和;
- 零向量的分解式唯一;
- $V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\}(i=1,2,\cdots,s)$;
- $\dim\left(\sum_{i=1}^{s}V_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\dim V_i\,(V_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是 $V$ 的有限维子空间)。

**3）线性空间是其两个子空间直和的证明方法**

设 $W_1, W_2$ 是数域 $P$ 上的线性空间 $V$ 的两个子空间, 欲证 $V = W_1 \oplus W_2$ 。

**方法 1：从集合的角度**。

只需证明：（1）$V = W_1 + W_2$；（2）$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ 同时成立。

对（1）只需要证 $V \subseteq W_1 + W_2$, 对（2）只需要证 $W_1 \cap W_2$ 中任一向量皆为零向量。

**方法 2：从维数的角度**（$V$ 是有限维线性空间）。

只需证明：（1）$\dim V = \dim (W_1 + W_2)$；（2）$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ 同时成立即可。

# （二）子空间的直和补空间

**1. 直和补空间的定义**

设 $V$ 是数域 $P$ 上的线性空间, $V_1, V_2$ 都是 $V$ 的子空间, 如果 $V = V_1 \oplus V_2$, 那么称 $V_2$ 为 $V_1$ 的**直和补空间**，当然 $V_1$ 也是 $V_2$ 的直和补空间。

**2. 直和补空间的求法**

设 $V$ 是数域 $P$ 上的 $n$ 维线性空间, $W$ 是 $V$ 的子空间, 且 $1 \leqslant \dim W = m < n$, 取定 $W$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 将其扩充为 $V$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 那么 $U = L(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 就是 $W$ 的一个直和补空间, 即 $V = W \oplus U$。

# 内容概要

### 1. 线性空间同构的定义

数域 $P$ 上的两个线性空间 $V$ 与 $V'$ 称为**同构**的, 如果存在 $V$ 到 $V'$ 的**双射** $\sigma$, 使其具有以下性质：对 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \forall k \in P$,

（1）$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$；

（2）$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$

这样的映射 $\sigma$ 称为 $V$ 到 $V'$ 的一个**同构映射**。

## 2. 重要结论

（1）在数域 $P$ 上的 $n$ 维线性空间 $V$ 中取定一组基后, 向量与它的坐标之间的对应就是 $V$ 到 $P^n$ 的一个同构映射，因而数域 $P$ 上任一 $n$ 维线性空间都与 $P^n$ 同构。

（2）线性空间同构满足反身性、对称性和传递性, 即设 $V_1, V_2, V_3$ 都是数域 $P$ 上的线性空间, 那么 1）$V_1$ 与 $V_1$ 同构; 2）若 $V_1$ 与 $V_2$ 同构, 则 $V_2$ 与 $V_1$ 同构; 3）若 $V_1$ 与 $V_2$ 同构, 且 $V_2$ 与 $V_3$ 同构, 则 $V_1$ 与 $V_3$ 同构。

（3）数域 $P$ 上的任意两个 $n$ 维线性空间都是同构的。

（4）数域 $P$ 上的两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相同。

（5）设 $V$ 是数域 $P$ 上的任一线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 是 $V$ 中的两个向量组, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 线性无关, 而 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p)\,\boldsymbol{A}$, 那么 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组有相同的线性关系, 即设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_q$, 那么

- 如果存在 $k_1, k_2, \cdots, k_q \in P$, 使得 $k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_q\boldsymbol{\eta}_q = \mathbf{0}$, 那么一定有 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_q\boldsymbol{\beta}_q = \mathbf{0}$, 反之亦然。
- 如果

$$\eta_j = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{\eta}_{j-1} + k_{j+1}\boldsymbol{\eta}_{j+1} + \cdots + k_q\boldsymbol{\eta}_q$$

那么一定有

$$\boldsymbol{\beta}_j = k_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{\beta}_{j-1} + k_{j+1}\boldsymbol{\beta}_{j+1} + \cdots + k_q\boldsymbol{\beta}_q$$

反之亦然, 因此 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_q$ 有相同的线性相关性。

（6）由（5）可知向量组与其在同一组基下的坐标的线性关系一致。

（7）在讨论线性空间同构时，所给的线性空间一定得是同一个数域上的线性空间。

## （二）同构映射的性质

设 $V$ 与 $W$ 都是数域 $P$ 上的线性空间, $\sigma$ 是 $V$ 到 $W$ 的一个同构映射, 则

（1）$\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}, \quad \sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$ 。

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}_i \in V, l_i \in P(i=1,2,\cdots,s)$, 则

$$\sigma\left(l_1 \boldsymbol{\alpha}_1+l_2 \boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s \boldsymbol{\alpha}_s\right)=l_1 \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)+l_2 \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)+\cdots+l_s \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_s\right)$$

（3）**同构映射保持向量组的线性相关性**, 即 $V$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关（无关）的充分必要条件是 $W$ 中的向量组 $\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_r\right)$ 线性相关（无关）。

（4）线性空间 $V$ 的任一子空间 $V_1$ 在 $\sigma$ 下的像集合 $\sigma(V_1)=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_1\}$ 是 $W$ 的子空间, 并且 $V_1$ 与 $\sigma(V_1)$ 同构, 因此 $V_1$ 与 $\sigma(V_1)$ 的维数相同。

（5）**同构映射的逆映射以及两个同构映射的乘积（如果可乘）仍为同构映射**。

（6）**无限维线性空间可以与它的真子空间同构**。

例如, 数域 $P$ 上的线性空间 $P[x]$ 与它的真子空间 $W=\{xf(x)\mid f(x)\in P[x]\}$ 同构, 这是因为如果设

$$\sigma: f(x)\to xf(x),\forall f(x)\in P[x]$$

那么 $\sigma$ 是 $P[x]$ 到它的真子空间 $W$ 的同构映射。

### 1. 同构映射的判别

设 $V$ 与 $W$ 都是数域 $P$ 上的线性空间, $\sigma$ 是 $V$ 到 $W$ 的一个映射。

1）证明 $\sigma$ 是同构映射的步骤

**第一步**：说明 $\sigma$ 是 $V$ 到 $W$ 的一个一一对应 (双射)。

**第二步**：说明 $\sigma$ 保加法运算。对 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$ 。

**第三步**：说明 $\sigma$ 保数乘运算。对 $\forall k \in P, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 。

注：第二步和第三步可归结为验证: 对 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \forall k, l \in P$, 有

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+l\sigma(\boldsymbol{\beta})$$

2）证明 $\sigma$ 不是 $V$ 到 $W$ 的同构映射的方法

只需验证 $\sigma$ 不满足下列条件之一即可。

- $\sigma$ 不是 $V$ 到 $W$ 的一一对应（双射)。
- 存在 $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_0 \in V$, 但 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\beta}_0) \neq \sigma(\boldsymbol{\alpha}_0)+\sigma(\boldsymbol{\beta}_0)$ 。
- 存在 $a_0 \in P, \boldsymbol{\alpha}_0 \in V$, 但 $\sigma(a_0\boldsymbol{\alpha}_0) \neq a_0\sigma(\boldsymbol{\alpha}_0)$ 。

**2. 线性空间同构的判别方法**

设 $V$ 与 $W$ 都是数域 $P$ 上的线性空间, 要证明 $V$ 与 $W$ 同构只需证明存在 $V$ 到 $W$ 的一个同构映射即可。

如果 $V$ 与 $W$ 都是数域 $P$ 上的有限维线性空间, 只需看它们的维数是否相等即可。

# （四）线性空间同构的意义

直接利用定义来求线性空间中一组向量的秩与极大线性无关组是比较困难的, 有了线性空间同构这个概念, 对于数域 $P$ 上的有限维（不妨设为 $n$ 维）线性空间 $V$ 中的一组向量 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$, 欲求其秩和极大线性无关组通常就可以采用以下方法:

先选取 $V$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ （一般取 $V$ 中结构最简单的一组基）, 然后求 $\gamma_i$ 在该基下的坐标 $\boldsymbol{\beta}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})'$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 利用同构映射的性质知 $V$ 中的向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 与 $P^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 有相同的线性相关性, 从而有相同的秩和对应的极大线性无关组, 这样就将求数域 $P$ 上其他一些 $n$ 维线性空间中向量组的秩与极大线性无关组的问题转化为求 $P^n$ 中向量组的秩与极大线性无关组的问题。

# 内容概要

**例** 6.1 设 $W_1$ 和 $W_2$ 是数域 $P$ 上的线性空间, 令 $V=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid \boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$, 对 $\forall\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right),\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)\in V,\forall k\in P$, 定义:

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)+\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2\right),\quad k\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)=\left(k\boldsymbol{\alpha}_1,k\boldsymbol{\alpha}_2\right)$$

证明: $V$ 按如上定义的加法和数量乘法构成数域 $P$ 上的线性空间。

**证明**: 由题设知 $V$ 是非空集合, 且上述给定的加法和数量乘法符合线性空间定义的加法和数量乘法的定义, 即给定的加法是 $V\times V$ 到 $V$ 的映射, 给定的数量乘法是 $P\times V$ 到 $V$ 的映射, 且

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)+\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)&=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2\right)\\
&=\left(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\alpha}_2\right)\\
&=\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)+\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)\\
\left(\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)+\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)\right)+\left(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\right)&=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\right)+\left(\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)+\left(\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2\right)\right)
\end{aligned}$$

设 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 分别是 $W_1, W_2$ 的零元素, 则 $(\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2)$ 是 $V$ 的零元素, 因对任意 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) \in V$ 有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) + (\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$$

对任意 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) \in V$, 存在负元 $(-\boldsymbol{\alpha}_1, -\boldsymbol{\alpha}_2) \in V$, 使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) + (-\boldsymbol{\alpha}_1, -\boldsymbol{\alpha}_2) = (\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2)$$

其次, 对 $\forall k, l \in P$ ,

$$\begin{aligned} k\left(l\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right)\right) &= (kl)\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right) \\ (k+l)\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right) &= k\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right) + l\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right) \\ k\left(\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right) + \left(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\right)\right) &= k\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right) + k\left(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\right) \\ 1\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right) &= \left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\right) \end{aligned}$$

所以 $V$ 是数域 $P$ 上的线性空间。

# 内容概要

**例** 6.2 验证例 6.1 中的线性空间 $V=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$ 的两个子集

$$V_1=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{0}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1\},\quad V_2=\{(\mathbf{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$$

（$\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 分别为 $W_1,W_2$ 的零元素）都是 $V$ 的子空间。

**证明**：首先, 因为 $V$ 的零元素 $(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2)\in V_1\cap V_2$, 所以 $V_1,V_2$ 都是 $V$ 的非空子集。

其次, 任取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2\in W_2,k,l\in P$, 有 $k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\beta}_1\in W_1,k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\beta}_2\in W_2$, 所以

$$\begin{aligned}k(\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{0}_2)+l(\boldsymbol{\beta}_1,\mathbf{0}_2)&=(k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\beta}_1,\mathbf{0}_2)\in V_1\\k(\mathbf{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+l(\mathbf{0}_1,\boldsymbol{\beta}_2)&=(\mathbf{0}_1,k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\beta}_2)\in V_2\end{aligned}$$

因此 $V_1,V_2$ 都是 $V$ 的子空间。

**例** 6.3 判断 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的下列子集是否构成 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的子空间, 说明理由。

（1） $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$

（2） $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \mid a + b + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R} \right\}.$

**解**：（1）不构成。因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$, 但

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W_1$, 所以 $W_1$ 不是 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的子空间。

（2）构成。首先, 因为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$, 所以 $W_2$ 是 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的非空子集。其次, 任取

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \in W_2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$, 有

$$a_1+b_1+c_1=0, a_1, b_1, c_1 \in \mathbf{R}, \quad a_2+b_2+c_2=0, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{R}$$

推出

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=0, a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2 \in \mathbf{R}$$

因此有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0 \\ 0 & c_1+c_2 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

对任意 $k \in \mathbf{R}$ ，有

$$ka_1 + kb_1 + kc_1 = 0, ka_1, kb_1, kc_1 \in \mathbf{R}$$

所以

$$k\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & kc_1 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$$

因此, $W_2$ 构成 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 的子空间。

**例** 6.4 设 $n$ 是正整数, $W = \{f(x) \mid f(1) = 0, f(x) \in \mathbf{R}[x]_n\}$, 试证: $W$ 是 $\mathbf{R}[x]_n$ 的子空间。

**证明**：首先，$W \subseteq \mathbf{R}[x]_n$, 又 $\mathbf{R}[x]_n$ 中的零多项式属于 $W$, 知 $W$ 是 $\mathbf{R}[x]_n$ 的非空子集。

其次, 任取 $f(x), g(x) \in W$, 有 $f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]_n$, 且 $f(1) = g(1) = 0$, 于是对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 有 $af(1) + bg(1) = 0$ 。又由次数定理知 $af(x) + bg(x) \in \mathbf{R}[x]_n$, 因此 $af(x) + bg(x) \in W$, 故 $W$ 是 $\mathbf{R}[x]_n$ 的子空间。

**例** 6.5 设 $V_1, V_2$ 均为线性空间 $V$ 的子空间, 证明: $V_1 \cup V_2$ 是 $V$ 的子空间的充分必要条件是 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$ 。

**证明**: **充分性**: 显然。

**必要性**: 用反证法。

假设 $V_1 \not\subset V_2$ 且 $V_2 \not\subset V_1$, 则存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1$, 但 $\boldsymbol{\alpha} \notin V_2, \boldsymbol{\beta} \in V_2$ 且 $\boldsymbol{\beta} \notin V_1$ 。由于 $V_1 \cup V_2$ 是 $V$ 的子空间, 所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_1 \cup V_2$, 推出 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_1$ 或 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_2$ 。而当 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_1$ 时, 由 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1$ 推出 $\boldsymbol{\beta} \in V_1$; 当 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_2$ 时, 由 $\boldsymbol{\beta} \in V_2$ 推出 $\boldsymbol{\alpha} \in V_2$ 。

两者均产生矛盾, 因此有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 既不属于 $V_1$, 也不属于 $V_2$, 这与 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V_1 \cup V_2$ 矛盾, 因此 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$ 。

**例** 6.6 设 $V$ 是数域 $P$ 上所有 $n$ 级对称矩阵关于矩阵的加法与数量乘法构成的线性空间，令 $V_1=\{\boldsymbol{A}\in V\mid \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0\}, V_2=\{\lambda\boldsymbol{E}_n\mid\lambda\in P\}$, 证明: $V_1,V_2$ 都是 $V$ 的子空间。

**证明**：只要证明 $V_1,V_2$ 是 $V$ 的非空子集，且对 $V$ 的线性运算满足封闭性即可。

首先, 由题设可知 $V_1\subseteq V, V_2\subseteq V$, 又 $V$ 中的零矩阵属于 $V_1$, $V$ 中的 $n$ 级单位矩阵属于 $V_2$, 所以 $V_1,V_2$ 都是 $V$ 的非空子集。

其次, 任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in V_1$, 任取 $k,l\in P$, 有 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in V$, 且 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})=0$, 进而有 $k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}\in V, \operatorname{tr}(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})=k(\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}))+l(\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}))=0$, 于是 $k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}\in V_1$, 故 $V_1$ 是 $V$ 的子空间。

对任意的 $\lambda_1,\lambda_2\in P$, 有 $k\left(\lambda_1\boldsymbol{E}_n\right)+l\left(\lambda_2\boldsymbol{E}_n\right)=\left(k\lambda_1+l\lambda_2\right)\boldsymbol{E}_n$。又 $k\lambda_1+l\lambda_2\in P$, 故 $k\left(\lambda_1\boldsymbol{E}_n\right)+l\left(\lambda_2\boldsymbol{E}_n\right)\in V_2$, 因此 $V_2$ 也是 $V$ 的子空间。

# 内容概要

**例** 6.7 设

$$V=\left\{\begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2-\mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix} \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}\right\},\mathrm{i}\ \text{是虚数单位}$$

求 $V$ 对于矩阵的加法和数量乘法构成的实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间的一组基和维数。

**解**：在 $V$ 中任取一个向量 $\begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2-\mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix}, x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R}$, 有

$$\begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2-\mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

令 $x_1=1,x_2=x_3=0$, 得 $\begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2-\mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$。

令 $x_1=0,x_2=1,x_3=0$, 得 $\begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2-\mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

令 $x_1=x_2=0,x_3=1$, 得 $\begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}x_3 & x_2 \\ x_2-\mathrm{i}x_1 & -x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。

知 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\in V$, 因此 $V$ 中任一向量都可以由它中的向量 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 线性表出, 所以 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是 $V$ 的一组生成元。

下面证明 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 线性无关。

设

$$k_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} k_1+k_3\mathrm{i} & k_2 \\ -k_1\mathrm{i}+k_2 & -k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得

$$k_1=k_2=k_3=0$$

所以$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$线性无关。

因此$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是 $V$ 的一组基, 从而有 $\dim V=3$ 。

**例** 6.8 求线性空间 $\mathbf{R}[x]_n$ （$n$ 是大于 1 的正整数）的子空间

$$W=\{f(x) \mid f(1)=0, f(x) \in \mathbf{R}[x]_n\}$$

的一组基和维数。

**解**: 任取 $f(x) \in W$, 有 $f(x) \in \mathbf{R}[x]_n$, 于是令 $f(x)=a_0+a_1 x+\cdots+a_{n-1} x^{n-1}$, 由 $f(1)=0$, 得 $a_0=-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}$, 因此有

$$f(x)=a_1(x-1)+a_2\left(x^2-1\right)+\cdots+a_{n-1}\left(x^{n-1}-1\right)$$

又 $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1 \in W$, 知 $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1$ 是 $W$ 的一组生成元。

下面证明 $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1$ 线性无关。若

$$b_1(x-1)+b_2\left(x^2-1\right)+\cdots+b_{n-1}\left(x^{n-1}-1\right)=0$$

则有

$$b_1 x+b_2 x^2+\cdots+b_{n-1} x^{n-1}-\left(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}\right)=0$$

推出

$$b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}=0$$

因此 $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1$ 线性无夹, 于是 $x-1, x^2-1, \cdots, x^{n-1}-1$ 是 $W$ 的一组基, 进而知 $\dim W=n-1$ 。

**例** 6.9 求 $P^{2\times 2}$ 中由矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ 生成的子空间的一组基与维数。

**解**: 【解题思路】$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的秩就是 $L(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)$ 的维数, $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的极大线性无关组就是 $L(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)$ 的基, 为此只需用同构映射的性质求出 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的秩及极大线性无关组。

取 $P^{2\times 2}$ 的一组基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$, 则有

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 恰好是 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 在 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标矩阵, 由同构映射的性质知 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 有相同的秩及相对应的极大线性无关组。对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换, 得矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 知 $\eta_1,\eta_2$ 为 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的一个极大线性无关组, 于是 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的秩也就是 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2 , 得 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的一个极大线性无关组, $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的秩为 2, 推出
$\dim L\left(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\right)=2$, $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 为 $L\left(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\right)$ 的一组基。

**例** 6.10 求 $P^{3\times 3}$ 中所有与 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵组成的的子空间 $\mathbf{C}(\boldsymbol{A})$ 的维数与一组基。

**解**: 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{33}$ 是 $p^{3\times 3}$ 中任一与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵, 则有

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\2b_{21}&2b_{22}&2b_{23}\\3b_{31}&3b_{32}&3b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&2b_{12}&3b_{13}\\b_{21}&2b_{22}&3b_{23}\\b_{31}&2b_{32}&3b_{33}\end{pmatrix}$$

所以有 $ib_{ij}=b_{ij}j$, 推出 $(i-j)b_{ij}=0(i,j=1,2,3)$, 于是当 $i\neq j$ 时, $b_{ij}=0$, 因此

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{A})=\left\{\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} b_{ii}\in P, i=1,2,3\right\}$$

所以 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{33}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{C}(\boldsymbol{A})$ 的一组基, $\mathbf{C}(\boldsymbol{A})$ 的维数为 3。

**例** 6.11 设 $V$ 是数域 $P$ 上所有 $n$ 级对称矩阵关于矩阵的加法与数量乘法构成的线性空间, 即 $V=\{\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}\mid \boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}\}$, 分别求出 $V$ 的下列两个子空间

$$V_1=\{\boldsymbol{A}\in V\mid \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0\},\quad V_2=\{\lambda\boldsymbol{E}_n\mid \lambda\in P\}$$

的一组基与维数。

**解**: 任取 $\boldsymbol{A}\in V_1$, 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

且 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=0$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -a_{22}-\cdots-a_{nn} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{ij}\left(\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}\right)+\sum_{i=2}^{n} a_{ii}\left(\boldsymbol{E}_{ii}-\boldsymbol{E}_{11}\right)
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}(1 \leqslant i<j \leqslant n), \boldsymbol{E}_{ii}-\boldsymbol{E}_{11}(i=2,3,\cdots,n) \in V_1$, 所以它们是 $V_1$ 的一组生成元。

又如果

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} b_{ij}\left(\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}\right)+\sum_{i=2}^{n} b_{ii}\left(\boldsymbol{E}_{ii}-\boldsymbol{E}_{11}\right) \\
=&\begin{pmatrix}
-b_{22}-\cdots-b_{nn} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn}
\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}
\end{aligned}
$$

那么

$$
b_{ij}=0(1 \leqslant i<j \leqslant n), b_{ii}=0 \quad(i=2,3, \cdots, n)
$$

知 $\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}(1 \leqslant i<j \leqslant n), \boldsymbol{E}_{ii}-\boldsymbol{E}_{11}(i=2,3, \cdots, n)$ 线性无关,所以它们构成 $V_1$ 的一组基,

$$
\operatorname{dim} V_1=\frac{n(n-1)}{2}+n-1=\frac{(n-1)(n+2)}{2}
$$

$V_2$ 的一组基为 $\boldsymbol{E}_n, \operatorname{dim} V_2=1$ 。

# 内容概要

**例** 6.12 设数域 $P$ 上线性空间 $V$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩为 $r$, 证明:

$$V_1=\left\{(k_1,k_2,\cdots,k_n)'\in P^n \mid k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}\right\}$$

是 $n$ 维线性空间 $P^n$ 的一个 $n-r$ 维子空间。

**证明**: 将由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 生成的 $V$ 的子空间记为 $W$, 如果 $r=0$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\cdots=\boldsymbol{\alpha}_n=0$, 推出 $V_1=P^n$, 得 $\dim V_1=n-0=n$, 因此当 $r=0$ 时命题成立。

下面设 $r>0$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的任一极大线性无关组都是 $W$ 的一组基, 不失一般性, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组, 它也是 $W$ 的一组基, 又设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的每个向量在这组基上的坐标分别为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$, 并令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$, 则 $r(\boldsymbol{A})=r$ 。

任取 $\boldsymbol{\eta} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)' \in V_1$, 有

$$
\begin{aligned}
k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\, \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

推出 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, 知 $\boldsymbol{\eta} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)'$ 是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0 \tag{4}$$

的解。在式(4) 中, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$。

反之, 任取齐次线性方程组(4) 的解 $\boldsymbol{\beta} = (l_1, l_2, \cdots, l_n)'$, 必有

$$
\begin{aligned}
l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{\alpha}_n &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\,\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

推出 $\boldsymbol{\beta} = (l_1, l_2, \cdots, l_n)' \in V_1$, 从而知 $V_1$ 是齐次线性方程组 (4)的解空间, 因此 $\dim V_1 = n - r(\boldsymbol{A}) = n - r$。

**例** 6.13 证明：数域 $P$ 上 $n$ 维线性空间 $P^n$ 的任一子空间 $W$ $(W \neq P^n)$ 是数域 $P$ 上某个齐次线性方程组的解空间。

**证明**：如果 $W$ 是 $P^n$ 的零子空间，那么 $W$ 是 $P$ 上齐次线性方程组 $\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间。

如果 $W$ 不是 $P^n$ 的零子空间且 $W \neq P^n$, 设 $\dim W = r$, 取 $W$ 的一组基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$, 那么 $0 < r < n$ 。令 $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r)$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{M}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间 $V$ 的维数为 $n - r > 0$ 。取 $V$ 的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-r}$, 令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-r})$, 有 $\boldsymbol{M}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 推出 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{M} = \boldsymbol{O}$ 。所以 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的 $r$ 个线性无关的解。又 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间的维数是 $n - r(\boldsymbol{A}') = n - (n - r) = r$, 从而知 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间的一组基, 所以 $W$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间。

# 内容概要

**例** 6.14 设 $P^4$ 的两个子空间 $W_1 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 2, 3)$, $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_4 = 0\}$, 求 $W_1 + W_2$ 与 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数。

**解**: $W_2$ 恰好是 $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ 的解空间, 于是 $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ 的任一基础解系都是 $W_2$ 的一组基。下面求 $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ 的基础解系。

由 $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$, 推出 $x_4 = x_1 + 2x_2$, 得到 $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$ 的一个基础解系也是 $W_2$ 的一组基:

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 0, 0, 1), \boldsymbol{\beta}_2 = (0, 1, 0, 2), \boldsymbol{\beta}_3 = (0, 0, 1, 0)$$

于是 $W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 进而得 $W_1 + W_2 = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的任一极大线性无关组都是 $W_1 + W_2$ 的一组基。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的一个极大线性无关组, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 为 $W_1 + W_2$ 的一组基, 故 $W_1 + W_2$ 的维数为 4 。

任取 $\boldsymbol{\gamma} \in W_1 \cap W_2$, 则有

$$\boldsymbol{\gamma} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2 + y_3\boldsymbol{\beta}_3 \tag{5}$$

由式(5) 得到齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', -\boldsymbol{\beta}_1', -\boldsymbol{\beta}_2', -\boldsymbol{\beta}_3')\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{6}$$

齐次线性方程组 (6) 的一般解为

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2} y_3 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{1}{2} y_3 \end{array}\right. \tag{7}$$

式 (7) 中 $y_3$ 为自由未知量。将式 (7)代入式 (5)中得

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{1}{2} y_3 \boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{1}{2} y_3 \boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{2} y_3 \left(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1\right) = \frac{1}{2} y_3 (0,1,2,2)$$

所以 $(0,1,2,2)$ 为 $W_1 \cap W_2$ 的一组基, $\dim\left(W_1 \cap W_2\right) = 1$ 。

注: $\boldsymbol{\gamma} = y_2 \boldsymbol{\beta}_2 + 2 y_2 \boldsymbol{\beta}_3 = y_2\left(\boldsymbol{\beta}_2 + 2\boldsymbol{\beta}_3\right) = y_2 (0,1,2,2)$ 。

**例** 6.15 设 $W_1, W_2$ 是线性空间 $V$ 的子空间。证明：如果 $V$ 的个子空间既包含 $W_1$ 又包含 $W_2$, 那么它一定包含 $W_1 + W_2$ 。在这个意义下, $W_1 + W_2$ 是 $V$ 的既包含 $W_1$ 又包含 $W_2$ 的最小子空间。

**证明**: 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in W_1 + W_2$, 则有 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2$, 使 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 。设 $W$ 是 $V$ 的一个子空间, 且 $W_1 \subseteq W, W_2 \subseteq W$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in W, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 推出 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \in W$, 因此 $W_1 + W_2 \subseteq W$, 即 $W_1 + W_2$ 包含在任意一个既包含 $W_1$ 又包含 $W_2$ 的子空间中。

另一方面, $W_1 + W_2$ 是 $V$ 的一个子空间, 且 $W_1 \subseteq W_1 + W_2, W_2 \subseteq W_1 + W_2$, 因而 $W_1 + W_2$ 是 $V$ 的既包含 $W_1$ 又包含 $W_2$ 的最小子空间。

# 内容概要

**例** 6.16 设 $V_1, V_2, V_3$ 都是数域 $P$ 上线性空间 $V$ 的有限维子空间, 证明:

$$\begin{aligned}&\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3\\ \geqslant&\dim(V_1+V_2+V_3)+\dim(V_1\cap V_2)+\dim(V_1\cap V_3)\\ &+\dim(V_2\cap V_3)-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\end{aligned}$$

**证明**: 由维数公式知

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+V_3)&=\dim V_1+\dim(V_2+V_3)-\dim(V_1\cap(V_2+V_3))\\ &=\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3\\ &\quad-\dim(V_2\cap V_3)-\dim(V_1\cap(V_2+V_3))\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3=&\dim(V_1+V_2+V_3)\\&+\dim(V_2\cap V_3)+\dim(V_1\cap(V_2+V_3))\end{aligned}$$

而 $(V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3)\subseteq V_1\cap(V_2+V_3)$，所以

$$\begin{aligned}&\dim((V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3))\\=&\dim((V_1\cap V_2))+\dim((V_1\cap V_3))-\dim((V_1\cap V_2\cap V_3))\\\leqslant&\dim(V_1\cap(V_2+V_3))\end{aligned}$$

因此得

$$\begin{aligned}&\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3\\\geqslant&\dim(V_1+V_2+V_3)+\dim(V_2\cap V_3)+\dim(V_1\cap V_2)+\dim(V_1\cap V_3)\\&-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\end{aligned}$$

**例** 6.17 设 $W_1, W_2, W_3$ 都是 $n$ 维线性空间 $V$ 的子空间, 且有

$$W_2 \subseteq W_3, W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3, W_1 + W_2 = W_1 + W_3$$

证明：$W_2 = W_3$ 。

**证明**：**方法 1** 利用维数公式。由题设知

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 + W_3), \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1 \cap W_3)$$

又

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \\ \dim(W_1 + W_3) &= \dim W_1 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_3) \end{aligned}$$

得 $\dim W_2 = \dim W_3$。又 $W_2 \subseteq W_3$，故 $W_2 = W_3$。

**方法 2** 利用集合相等。

任取 $\boldsymbol{\beta} \in W_3$，则 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\beta} \in W_1 + W_3 = W_1 + W_2$, 于是有 $\boldsymbol{\gamma} \in W_1$ 及 $\boldsymbol{\alpha} \in W_2 \subseteq W_3$, 使 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha}$, 知 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \in W_3$, 从而 $\boldsymbol{\gamma} \in W_1 \cap W_3 = W_1 \cap W_2$, 必有 $\boldsymbol{\gamma} \in W_2$, 于是 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha} \in W_2$, 推出 $W_3 \subseteq W_2$ 。

又 $W_2 \subseteq W_3$, 因此 $W_2 = W_3$ 。

# 内容概要

**例** 6.18 设 $\boldsymbol{A} \in P^{n\times n}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$, $n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_1 x = 0$ 与 $\boldsymbol{A}_2 x = 0$ 的解空间分别为 $W_1, W_2$, 证明: $P^n = W_1 \oplus W_2$ 。

**证明**: 设 $n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间为 $W$, 则 $W_1, W_2$ 与 $W$ 都是 $P^n$ 的子空间, 且 $W = W_1 \cap W_2$ 。因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 所以 $W = W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$, 推出 $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, 因此有 $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2)$, 而且 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}_1) + r(\boldsymbol{A}_2) = n$。

由于 $W_1, W_2$ 皆为 $P^n$ 的子空间，因此 $W_1 + W_2 \subseteq P^n$。因为

$$\dim W_1 = n - r(\boldsymbol{A}_1), \dim W_2 = n - r(\boldsymbol{A}_2) = n - (n - r(\boldsymbol{A}_1)) = r(\boldsymbol{A}_1)$$

所以 $\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 = n$，因此 $P^n = W_1 \oplus W_2$。

**例** 6.19 已知 $V_1 = \{\boldsymbol{A} \in P^{n\times n} \mid \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'\}$ 是 $P^{n\times n}$ 的子空间，求 $P^{n\times n}$ 的子空间 $V_2$ 使得 $P^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$ 。

**解**：令 $V_2 = \{\boldsymbol{A} \in P^{n\times n} \mid \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}'\}$, 可验证 $V_2$ 是 $V$ 的子空间。任取 $\boldsymbol{A} \in P^{n\times n}$, 有

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'}{2} + \frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'}{2}$$

又 $\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\right)' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')$, 则 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}') \in V_1$, $\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\right)' = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$, 所以 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}') \in V_2$, 从而知 $P^{n\times n} = V_1 + V_2$ 。

任取 $\boldsymbol{B} \in V_1 \cap V_2$, 有 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}' = -\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$, 即 $V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{O}\}$, 故 $P^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$ 。

**例** 6.20 考虑例 6.1 中的线性空间

$$V=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$$

（$W_1,W_2$ 都是数域 $P$ 上的线性空间）的两个子空间

$$V_1=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{0}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1\},V_2=\{(\mathbf{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$$

（$\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 分别为 $W_1,W_2$ 的零元），证明: $V=V_1\oplus V_2$ 。

**证明**：对任意 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\in V$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{0}_2)+(\mathbf{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),\quad(\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{0}_2)\in V_1,(\mathbf{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\in V_2$$

所以 $V=V_1+V_2$ 。

又对任意 $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\in V_1\cap V_2$, 由 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$ 知 $\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}_2$, 由 $\boldsymbol{\beta}\in V_2$ 知 $\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{0}_1$, 所以 $\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2)$, 即 $V_1\cap V_2=\{(\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2)\}$, 故 $V=V_1\oplus V_2$ 。

# 内容概要

**例** 6.21 考虑例 6.1 中的线性空间

$$V=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid \boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$$

（$W_1,W_2$ 都是数域 $P$ 上的线性空间）的两个子空间

$$V_1=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{0}_2)\mid \boldsymbol{\alpha}_1\in W_1\},V_2=\{(\mathbf{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid \boldsymbol{\alpha}_2\in W_2\}$$

（$\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 分别为 $W_1,W_2$ 的零元)。

（1）证明: $V_i$ 与 $W_i(i=1,2)$ 同构。

（2）设 $\dim W_1=m,\dim W_2=n$, 求 $\dim V$ 。

（1）**证明**: 定义映射 $\varphi_i:V_i\to W_i(i=1,2)$ 如下,

$$\varphi_1:(\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{0}_2)\mapsto\boldsymbol{\alpha}_1,\forall\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1$$
$$\varphi_2:(\mathbf{0}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mapsto\boldsymbol{\alpha}_2,\forall\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2$$

则 $\varphi_i: V_i \to W_i (i=1,2)$ 是双射, 且任取 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \in W_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 \in W_2, k, l \in P$, 有

$$\begin{aligned}
\varphi_1\left((\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}_2) + (\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{0}_2)\right) &= \varphi_1\left((\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{0}_2)\right) \\
&= \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1 \\
&= \varphi_1\left((\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}_2)\right) + \varphi_1\left((\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{0}_2)\right) \\
\varphi_1\left(k(\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}_2)\right) &= \varphi_1\left((k\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}_2)\right) \\
&= k\boldsymbol{\alpha}_1 \\
&= k\varphi_1\left((\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}_2)\right) \\
\varphi_2\left(k(\mathbf{0}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) + l(\mathbf{0}_1, \boldsymbol{\beta}_2)\right) &= \varphi_2\left((\mathbf{0}_1, k\boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\beta}_2)\right) \\
&= k\boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\beta}_2 \\
&= k\varphi_2\left((\mathbf{0}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)\right) + l\varphi_2\left((\mathbf{0}_1, \boldsymbol{\beta}_2)\right)
\end{aligned}$$

因此 $\varphi_i: V_i \to W_i$ 是 $V_i$ 到 $W_i (i=1,2)$ 的同构映射, 所以 $V_1$ 与 $W_1$ 同构, $V_2$ 与 $W_2$ 同构。

（2）**解**: 因 $\varphi_i : V_i \to W_i$ 是 $V_i$ 到 $W_i (i = 1, 2)$ 的同构映射, 由同构映射的性质知

$$\dim V_1 = \dim W_1, \quad \dim V_2 = \dim W_2,$$

又由例 6.20 知 $V = V_1 \oplus V_2$, 因此

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 = \dim W_1 + \dim W_2 = m + n$$

**例** 6.22 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, 证明: 由 $\boldsymbol{A}$ 的全体实系数多项式构成的集合 $V$ 关于矩阵的加法与数量乘法构成的 $\mathbf{R}$ 上的线性空间与复数域 $\mathbf{C}$ 作为 $\mathbf{R}$ 上的线性空间同构。

**证明**: **【解题思路】**因为 $\mathbf{C}$ 作为 $\mathbf{R}$ 上的线性空间其维数为 2 , 所以只需说明 $\dim V=2$ 。

由题设知 $V=\{f(\boldsymbol{A})\mid f(x)\in\mathbf{R}[x]\}$, 又 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^0&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_2,\\ \boldsymbol{A}^2&=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{E}_2,\\ \boldsymbol{A}^3&=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

因此 $V=\{a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}_2\mid a_1,a_0\in\mathbf{R}\}$, 知 $\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{A}$ 是 $V$ 的一组生成元。又如果

$$
\begin{aligned}
k\boldsymbol{E}_2 + l\boldsymbol{A} &= k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k & -l \\ l & k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

那么有 $k = l = 0$, 所以 $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{A}$ 线性无关, 知 $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{A}$ 是 $V$ 的一组基, 故 $V$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 2 维线性空间, 而 $\mathbf{C}$ 也是 $\mathbf{R}$ 上的 2 维线性空间, 所以 $V$ 与 $\mathbf{C}$ 同构。

**例** 6.23 令 $V=P[x]_4, W=P^4$, 求映射 $\sigma: V\to W$, 使得 $V\cong W$ 。

**解**: $\forall g(x)\in P[x]_4, g(x)$ 都可以写成 $P[x]_4$ 的基 $1,x,x^2,x^3$ 的唯一线性组合

$$g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$$

$(a_1,a_2,a_3,a_4)\in P^4$ 是 $g(x)$ 在基 $1,x,x^2,x^3$ 下的坐标，从而建立了 $V=P[x]_4$ 到 $W=P^4$ 的双射

$$\sigma: g(x)\mapsto (a_1,a_2,a_3,a_4)$$

满足对 $\forall g(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3, h(x)=b_1+b_2x+b_3x^2+b_4x^3\in P[x]_4$，有

$$\sigma(g(x)+h(x))=\sigma(g(x))+\sigma(h(x))$$

对 $\forall a\in P$,

$$\sigma(ag(x))=a\sigma(g(x))$$

于是 $\sigma$ 是 $V=P[x]_4$ 到 $W=P^4$ 的同构映射, 所以 $V\cong W$。

**例** 6.24 设 $V$ 是数域 $P$ 上的 $n$ 维线性空间，$n \geqslant 1$。证明：必存在 $V$ 中一个向量序列 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中任何 $n$ 个向量都是 $V$ 的一组基。

**证明**：**【解题思路】** 利用同构映射的性质。

任取 $V$ 的一组基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$, 对任一正整数 $i$, 令

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}_1 + i\boldsymbol{\beta}_2 + i^2\boldsymbol{\beta}_3 + \cdots + i^{n-1}\boldsymbol{\beta}_n \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

则向量序列中任意 $n$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{k_1}, \boldsymbol{\alpha}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k_n}$ （$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为任意 $n$ 个互补相同的正整数）满足

$$(\boldsymbol{\alpha}_{k_1}, \boldsymbol{\alpha}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k_n}) = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

由于 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为任意 $n$ 个互不相同的正整数, 所以

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

故 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵, 于是由同构映射的性质可知 $\boldsymbol{\alpha}_{k_1}, \boldsymbol{\alpha}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k_n}$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 中的线性无关向量组，因此 $\boldsymbol{\alpha}_{k_1}, \boldsymbol{\alpha}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{k_n}$ 是 $V$ 的一组基。

**例** 6.25 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$ 是 $n+1$ 个向量, 且 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n$ 。证明: $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关。

**证明**: **【解题思路】**利用同构映射的性质。

因为

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n \\
\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n \\
\cdots\cdots \\
\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{n-1}
\end{gathered}$$

所以

$$(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

注意到$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0$，由同构映射的性质可知问题得证。

**例** 6.26 求 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中的向量组

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}_5=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ 的秩和一个极大线性无关组。

**解**: 【解题思路】利用同构映射的性质。

取 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的基

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4, \boldsymbol{A}_5$ 在这组基下的坐标为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{B}$, 并对 $\boldsymbol{B}$ 做初等行变换将其化为阶梯形矩阵, 即

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & -10 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

可见 $r(\boldsymbol{B})=3$, 且 $\boldsymbol{B}$ 的第 $1,2,3$ 个列向量是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大线性无关组, 故向量组 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_5$ 的秩为 3 , 且 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 是 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4,\boldsymbol{A}_5$ 的一个极大线性无关组。