高等代数选讲
Selection of Advanced Algebra

第七讲：线性变换
Lecture 7: Linear Transformations

主讲教师：艾武

数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics
桂林理工大学
Guilin University of Technology

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、线性变换的概念与判别

二、线性变换的运算、矩阵

三、特征值、特征向量与对角矩阵

四、线性变换的值域与核

五、线性变换的不变子空间

2 典型例题

知识点 1：线性变换的定义

知识点 2：线性变换的运算与矩阵

知识点 3：特征值、特征向量与对角矩阵

知识点 4：线性变换的值域与核

知识点 5：不变子空间

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、线性变换的概念与判别

二、线性变换的运算、矩阵

三、特征值、特征向量与对角矩阵

四、线性变换的值域与核

五、线性变换的不变子空间

2 典型例题

知识点 1：线性变换的定义

知识点 2：线性变换的运算与矩阵

知识点 3：特征值、特征向量与对角矩阵

知识点 4：线性变换的值域与核

知识点 5：不变子空间

（一）线性变换的定义

数域 P 上的线性空间 V 的一个**变换** σ 称为**线性变换**, 如果对 V 中任意的向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 和数域 P 中的任意数 k, 都有

- $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$
- $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$

注:

(1) 设 M 是任意一个非空集合, M 到 M 的任一映射都称为 M 的一个**变换**。

(2) 数域 P 上的线性空间 V 的一个变换就是 V 到 V 的一个映射。

(3) 数域 P 上的线性空间 V 的线性变换就是 V 的**保持向量的加法与数量乘法的变换**。

（二）线性变换的相等

（1）设 σ, τ 都是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, 那么 $\sigma=\tau$ 当且仅当对 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\tau(\boldsymbol{\alpha})$$

（2）设 σ, τ 都是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基, 那么 $\sigma=\tau$ 当且仅当

$$\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_k\right)=\tau\left(\boldsymbol{\alpha}_k\right) \quad(k=1,2, \cdots, n)$$

（三）线性变换的判别

设 σ 为数域 P 上线性空间 V 的一个变换, $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \forall k, l \in P$ 。

（1） σ 为 V 的线性变换当且仅当

- $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$
- $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$

（2） σ 为 V 的线性变换当且仅当

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+l\sigma(\boldsymbol{\beta})$$

设 V 是数域 P 上的线性空间, σ 为 V 的线性变换, $\forall \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha} \in V$, $k_1, k_2, \cdots, k_s \in P$ 。

（1）$\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \sigma(-\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 。

（2）**线性变换保持向量的线性关系**, 即若 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$, 则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = k_1\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) + k_2\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) + \cdots + k_s\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_s\right)$$

（3）若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_s\right)$ 也线性相关。

（4）设线性变换 σ 为单射, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_s\right)$ 也线性无关。

注：设 V 是数域 P 上的线性空间, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 是 V 中的两个向量组, 如果

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= c_{11}\boldsymbol{\gamma}_1 + c_{12}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + c_{1s}\boldsymbol{\gamma}_s \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= c_{21}\boldsymbol{\gamma}_1 + c_{22}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + c_{2s}\boldsymbol{\gamma}_s \\ &\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_m &= c_{m1}\boldsymbol{\gamma}_1 + c_{m2}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + c_{ms}\boldsymbol{\gamma}_s\end{aligned} \tag{1}$$

将式 (1)记为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m) = (\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1s} & c_{2s} & \cdots & c_{ms}\end{pmatrix} \tag{2}$$

于是, 若 $\dim V = n, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基, σ 是 V 的线性变换, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 是 V 中任意一组向量, 则 $\sigma(\boldsymbol{\beta}_1), \sigma(\boldsymbol{\beta}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\beta}_m)$ 可以由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出。设

$$\begin{aligned} \sigma(\boldsymbol{\beta}_1) &= b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \sigma(\boldsymbol{\beta}_2) &= b_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots\cdots & \\ \sigma(\boldsymbol{\beta}_m) &= b_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{mn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{aligned} \tag{3}$$

再记

$$\sigma(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m) = (\sigma(\boldsymbol{\beta}_1), \sigma(\boldsymbol{\beta}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\beta}_m)) \tag{4}$$

由式 (1)、式(2) 与式(4) 知, 式 (3)就可以写成下列形式

$$\sigma\left(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right)\left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{21} & \cdots & c_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{array}\right) \tag{5}$$

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & c_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组。

如果 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 那么 $\sigma\left(\boldsymbol{\beta}_1\right)=\sigma\left(\boldsymbol{\beta}_2\right)=\cdots=\sigma\left(\boldsymbol{\beta}_m\right)=\mathbf{0}$;

如果 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, 设 $\boldsymbol{\eta}_{i_1}, \boldsymbol{\eta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i$ 是 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_m$ 的一个极大线性无关组, 那么 $\sigma\left(\boldsymbol{\beta}_{i_1}\right), \sigma\left(\boldsymbol{\beta}_{i_2}\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\beta}_{i_r}\right)$ 就是 $\sigma\left(\boldsymbol{\beta}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\beta}_2\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\beta}_m\right)$ 的一个极大线性无关组, 因此向量组 $\sigma\left(\boldsymbol{\beta}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\beta}_2\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\beta}_m\right)$ 的秩等于 $r(\boldsymbol{B})$ 。

（因 $\forall \boldsymbol{\alpha}=a_1 \boldsymbol{\alpha}_1+a_2 \boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_n \boldsymbol{\alpha}_n \in V$, $f: \boldsymbol{\alpha} \mapsto\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$ 是数域 P 上的线性空间 V 到 P^n 的同构映射）

（五）线性变换举例

（1）设 V 是数域 P 上的任一线性空间，那么

1) V 的**零变换** $o(o(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\forall\boldsymbol{\alpha}\in V)$ 是 V 的线性变换;
2) V 的**恒等变换**或**单位变换** $\iota(\iota(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},\forall\boldsymbol{\alpha}\in V)$ 是 V 的线性变换;
3) **幂零线性变换**: 设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, 如果存在正整数 m, 使得 $\sigma^m=o$, 就称 σ 为 V 的幂零线性变换;
4) **幂等线性变换**: 设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, 如果 $\sigma^2=\sigma$, 就称 σ 为 V 的幂等线性变换。

（2）设 $V=P^n$, 任意取定数域 P 上的一个 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$, 令

$$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad\forall\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in P^n$$

那么 σ 为 $V=P^n$ 的线性变换。

（3）$V=P[x], D(f(x))=f'(x), \forall f(x)\in P[x]$, 那么 D 为 $V=P[x]$ 的线性变换。

（4）$V=P^{n\times n}, \boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 V 中一固定矩阵, $\tau(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}, \forall \boldsymbol{X}\in P^{n\times n}$ 是 $V=P^{n\times n}$ 的线性变换。

（六）可逆变换与可逆线性变换

1. 线性空间的可逆变换

数域 P 上的线性空间 V 的变换 σ 称为**可逆的**, 如果有 V 的变换 τ 存在, 使

$$\sigma\tau = \tau\sigma = \iota \quad (\iota \text{ 是} V \text{ 的恒等变换})$$

此时变换 τ 称为 σ 的**逆变换**, 记为 σ^{-1} 。

注： 可逆变换的逆变换唯一。

2. 线性空间的可逆线性变换

1）可逆线性变换的定义

设 V 是数域 P 上的线性空间, 如果 σ 既是 V 的线性变换又是 V 的可逆变换, 就称 σ 为 V 的可逆线性变换, 此时 σ 的逆变换 σ^{-1} 也是 V 的线性变换。

2）线性变换可逆的判别

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, 那么

（1）σ 可逆当且仅当 σ 是 V 到 V 的一一**对应**或**双射**;

（2）若 $\dim V = n, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的任意一组基, 那么 σ 可逆当且仅当 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也是 V 的一组基。

内容概要

1. 线性变换的加法、乘法、数量乘法的定义

设 V 是数域 P 上的线性空间, σ, τ 是 V 的两个线性变换, 定义它们的和 $\sigma+\tau$, 乘积 $\sigma\tau$ 分别为

$$(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \tau(\boldsymbol{\alpha}), \quad (\sigma\tau)(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha})), \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V \tag{6}$$

任取 $k \in P$, 定义数量乘法 $k\sigma$ 为

$$(k\sigma)(\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V \tag{7}$$

σ 的负变换 $-\sigma$ 为

$$(-\sigma)(\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V \tag{8}$$

则 $\sigma+\tau, \sigma\tau, k\sigma$ 与 $-\sigma$ 都是 V 的线性变换。

2. 线性变换的加法、乘法、数量乘法的运算规律

设 V 是数域 P 上的线性空间, σ, τ, ψ 都是 V 的线性变换, k, l 是 P 中任意数。

1）加法

（1）交换律: $\sigma+\tau=\tau+\sigma$;

（2）结合律: $(\sigma+\tau)+\psi=\sigma+(\tau+\psi)$;

（3）$o+\sigma=\sigma$;

（4）$\sigma+(-\sigma)=o$ 。

2）数量乘法

（1）$(kl)\sigma=k(l\sigma)$;

（2）$1\sigma=\sigma$ 。

3）加法与数量乘法

（1）$(k+l)\sigma = k\sigma + l\sigma$;

（2）$k(\sigma+\tau) = k\sigma + k\tau$ 。

3. 线性变换的多项式

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, n 是正整数, k, l 为非负整数。

（1）σ 的 n 次幂: $\sigma^n = \overbrace{\sigma\sigma\cdots\sigma}^{n\text{个}}$ 。

（2）$\sigma^0 = \imath$ （ι 为 V 的恒等变换或单位变换)。

（3）指数法则：$\sigma^k\sigma^l = \sigma^{k+l}, \left(\sigma^k\right)^l = \sigma^{kl}$ 。

（4）σ 的多项式: 任取 $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \in P[x]$, 定义

$$g(\sigma) = b_m\sigma^m + b_{m-1}\sigma^{m-1} + \cdots + b_1\sigma + b_0\iota$$

那么 $g(\sigma)$ 是 V 的线性变换, $g(\sigma)$ 称为线性变换 σ 的多项式。

（5）若 σ 可逆, 定义 $\sigma^{-n}=\left(\sigma^{-1}\right)^{n}$ 。

注：设 σ,τ 都是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, n 是正整数, 一般说来 $(\sigma\tau)^n\neq\sigma^n\tau^n$ 。

4. 线性变换构成的线性空间

设 V 是数域 P 上的线性空间, 令

$$L(V)=\{\sigma\mid\sigma\text{ 为}V\text{ 的线性变换}\}$$

那么 $L(V)$ 按线性变换的加法和数量乘法构成数域 P 上的线性空间。

1. 线性变换的矩阵

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一组基, σ 是 V 的一个线性变换, 则基向量的像 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 可以由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出， 即

$$\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n \\
\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) &= a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n \\
&\cdots\cdots \\
\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n) &= a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n
\end{aligned} \tag{9}$$

由式 (3)式 (5) 可知, 式 (9) 可写成下列形式

$$\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

将式(11)中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**矩阵**。

注意, $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列 $(j=1,2,\cdots,n)$ 恰好是 $\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_j\right)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标。

2. 线性变换的和、乘积、数量乘积、逆变换、负变换及多项式的矩阵

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一组基, $\forall \sigma, \tau \in L(V)$, 它们在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, s$ 为任意正整数。

（1）$\sigma + \tau, \sigma\tau, \sigma^s$ 与 $-\sigma$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^s$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 。

（2）任取 $k \in P, k\sigma$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $k\boldsymbol{A}$ 。

（3）若 σ 为可逆线性变换，则 σ^{-1} 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 。

（4）设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为数域 P 上的任一多项式, 则

$$f(\sigma) = a_m \sigma^m + a_{m-1} \sigma^{m-1} + \cdots + a_1 \sigma + a_0 \iota$$

在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为

$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + a_{m-1} \boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}_n$$

（5）σ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 可逆（有限维线性空间的线性变换可逆的判定定理)。

（6）令

$$f: L(V) \to P^{n\times n}, \quad \sigma \mapsto \boldsymbol{A}, \quad \forall \sigma \in L(V)$$

那么 f 是数域 P 上的线性空间 $L(V)$ 到数域 P 上的线性空间 $P^{n\times n}$ 的同构映射, 因此 $L(V) \cong P^{n\times n}$, 于是 $L(V)$ 是 n^2 维线性空间。

3. 向量在线性变换下像的坐标公式

设数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, V 中的向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 则 $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 可按如下公式计算:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{12}$$

4. 矩阵的相似

1）矩阵相似的定义

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是数域 P 上的两个 n 级方阵, 如果存在数域 P 上的 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}$, 就称在数域 P 上 $\boldsymbol{A}$ **相似**于 $\boldsymbol{B}$, 记为在数域 P 上 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 。

2）矩阵相似的性质

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是数域 P 上的 n 级方阵。

性质 1 （反身性） $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$。

性质 2 （对称性） 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$ 。

性质 3 （传递性） 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$ 。

性质 4 若 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}$, 则对任意正整数 k, 有 $\boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T}$ 。

3）线性变换在不同基下的矩阵之间的关系

（1）设数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 在 V 的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$, 那么 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, 即**同一线性变换在不同基下的矩阵彼此相似**。

（2）设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是数域 P 上的两个 n 级方阵, 且在数域 P 上 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, V$ 是数域 P 上的任一 n 维线性空间, 那么存在 V 的线性变换 σ, 使得 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 σ 在 V 的两组基下的矩阵。

注：矩阵的相似与数域有关。

内容概要

1. 矩阵的特征多项式

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$ 为数域 P 上的一个 n 级方阵, λ 是一个文字, 将矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix} \tag{13}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**, 记为 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$, 它是数域 P 上的一个 n 次多项式, 且

$$\begin{aligned}f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)&=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|\\&=\lambda^n+(-1)\left(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\right)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|\\&=\lambda^n+(-1)\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|\end{aligned} \tag{14}$$

注：将 $\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵**, $|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=0$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**。

2. 矩阵的特征值与特征向量的定义

n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|$ 在复数域上的所有根都称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**。

设 $\lambda_0\in\mathbf{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 将齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=0$ 的每个**非零解**都称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的**特征向量**。

3. 矩阵的特征值与特征向量的判别

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级方阵，$\lambda_0 \in \mathbf{C}$ 。

（1）λ_0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值当且仅当 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda_0) = |\lambda_0 \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}| = 0$ 。

（2）λ_0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值当且仅当存在 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{C}^n$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha}$ 。

（3）设 λ_0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量当且仅当 $(\lambda_0 \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个非零解。

4. 矩阵的特征值与特征向量的求法

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级方阵。

第一步：求 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|$ 在复数域上的所有根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（重根按重数计算）。

第二步：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s(1\leqslant s\leqslant n)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值, 对 $\lambda_k(k=1,2,\cdots,s)$, 解齐次线性方程组 $(\lambda_k\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得其一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_{k1},\boldsymbol{\eta}_{k2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{k,l_k}\,(l_k=n-r\,(\lambda_k\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}))$$

则 $\boldsymbol{\eta}_{k1},\boldsymbol{\eta}_{k2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{k,l_k}$ 就是与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_k(k=1,2,\cdots,s)$ 相对应的线性无关特征向量。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_k 的全部特征向量为

$$s_{k1}\boldsymbol{\eta}_{k1}+s_{k2}\boldsymbol{\eta}_{k2}+\cdots+s_{k,l_k}\boldsymbol{\eta}_{k,l_k} \tag{15}$$

式(15) 中的 $s_{k1},s_{k2},\cdots,s_{k,l_k}$ 为不全为零的任意常数（复数）。

5. 重要结论

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级方阵。

（1）若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$, $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 。

（2）**相似矩阵有相同的特征多项式**，从而有相同的特征值、相同的迹、相同的行列式。

（3）设 $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{X}_0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量, $g(x)$ 为一复系数多项式, 那么

1）$g\left(\lambda_0\right)$ 为 $g(\boldsymbol{A})$ 的特征值, $\boldsymbol{X}_0$ 为 $g(\boldsymbol{A})$ 的属于特征值 $g\left(\lambda_0\right)$ 的特征向量;

2）若 $\boldsymbol{A}$ 还是可逆矩阵, 则 $\frac{1}{\lambda_0}$ 与 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 分别为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值, $\boldsymbol{X}_0$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的属于特征值 $\frac{1}{\lambda_0}$ 的特征向量, $\boldsymbol{X}_0$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的属于特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}$ 的特征向量;

3）设 $\boldsymbol{Q}$ 是 n 级可逆矩阵, 则 λ_0 是 $\boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}$ 的特征值, $\boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量;

4）若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 则 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$ 就是 $g(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值; 若 $\boldsymbol{A}$ 还是可逆矩阵, 则 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的全部特征值, $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}, \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}, \cdots, \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_n}$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的全部特征值。

6. 矩阵的特征子空间

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 级方阵。

1）矩阵的特征子空间的定义

设 λ_0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $V_{\lambda_0}=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{C}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的子空间, 将 V_{λ_0} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的（属于特征值 λ_0 的）**特征子空间**。

2）矩阵的特征子空间 V_{λ_0} 的求法

由 1）知 V_{λ_0} 就是齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间, 因此只需求得

$$(\lambda_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

的一个**基础解系** $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k(k=n-r(\lambda_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}))$, 那么 $V_{\lambda_0}=L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k)$ 。

1. 线性变换的特征值与特征向量的定义

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, $\lambda_0 \in P$, 若存在 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha}$, 就称 λ_0 为 σ 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 σ 的一个属于特征值 λ_0 的特征向量。

2. 线性变换的特征多项式

设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, 则 σ 在 V 的不同基下的矩阵彼此相似, 而相似矩阵具有相同的特征多项式, 所以 σ 在 V 的不同基下矩阵的特征多项式是相同的, 于是任取 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 设 σ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}|$ 为 σ 的特征多项式, 记为 $f_\sigma(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}|$, 即线性变换 σ 的特征多项式为其在 V 的任意基下矩阵的特征多项式。

3. 有限维线性空间的线性变换的特征值与特征向量

1）判别

设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, σ 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n, \quad \lambda_0 \in \mathbf{C}$ 。

（1）λ_0 是 σ 的特征值当且仅当 $\lambda_0 \in P$, 且 $f_\sigma(\lambda_0) = |\lambda_0 \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}| = 0$, 即 λ_0 是 σ 的特征多项式 $f_\sigma(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}|$ 在 P 中的根。

（2）设 λ_0 是 σ 的特征值, 那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量当且仅当 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)'$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的非零解。

2）求法

设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换。

第一步：取定 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 求出 σ 在该基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 。

第二步：求 $f_\sigma(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}|$ 在 P 中的所有根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ （$0 \leqslant m \leqslant n$, 重根按重数计算, 且 $m = 0$ 表示 σ 无特征值)。

第三步：若 $m > 0$, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t (1 \leqslant t \leqslant m)$ 是 σ 的所有不同的特征值, 对 $\lambda_k (k = 1, 2, \cdots, t)$, 求齐次线性方程组 $(\lambda_k \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_{k1}, \boldsymbol{\eta}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{k,l_k} \quad (l_k = n - r(\lambda_k \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}))$$

则 σ 的属于特征值 λ_k 的线性无关特征向量为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \boldsymbol{\eta}_{kj} \, (j = 1, 2, \cdots, l_k)$$

σ 的属于特征值 λ_k 的全部特征向量为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\left(s_{k1}\boldsymbol{\eta}_{k1} + s_{k2}\boldsymbol{\eta}_{k2} + \cdots + s_{k,l_k}\boldsymbol{\eta}_{k,l_k}\right) \tag{16}$$

式(16)中的 $s_{k1}, s_{k2}, \cdots, s_{k,l_k}$ 为 P 中不全为零的任意常数。

1. 定义

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, λ_0 是 σ 的特征值, 则 $V_{\lambda_0} = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha}\}$ 是 V 的子空间，将其称为 σ 的（属于特征值 λ_0 的）**特征子空间**。

注：设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, λ_0 是 σ 的特征值, 那么 $\dim V_{\lambda_0}$ 称为 σ 的特征值 λ_0 的几何重数, 而 λ_0 作为 σ 的特征多项式 $f_\sigma(\lambda)$ 的根, 其重数称为 λ_0 的代数重数, 且 λ_0 的几何重数小于或等于 λ_0 的代数重数。

2. 有限维线性空间的线性变换的特征子空间求法

设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, λ_0 是 σ 的特征值。

第一步：取定 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 求得 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 。

第二步：求齐次线性方程组 $(\lambda_0 E_n - \boldsymbol{A})\, x = 0$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_k \quad (k = n - r\,(\lambda_0 \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}))$$

令

$$\boldsymbol{\gamma}_j = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\, \boldsymbol{\eta}_j \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \tag{17}$$

那么式 (17)中的 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ 就是 σ 的（属于特征值 λ_0 的）特征子空间 V_{λ_0} 的一组基，于是 $V_{\lambda_0} = L\,(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k)$ 。

1. 矩阵可对角化

1）矩阵可对角化的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上的一个 n 级方阵, 如果存在数域 P 上的一个 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵, 就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在数域 P 上**可对角化**或 $\boldsymbol{A}$ 在数域 P 上与对角矩阵相似。

如无特殊说明, 矩阵可对角化指的是该矩阵在复数域上可对角化。

2）矩阵特征值的代数重数与几何重数

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}| = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{l_k} \tag{18}$$

式(18) 中的 $l_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 为正整数。

称式(18)中的正整数 $l_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 的代数重数。称 $s_i = n - r(\lambda_i \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 的几何重数。

注:

(1) 设齐次线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间为 W_i, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 的几何重数 $s_i = \dim W_i$, 而 $W_i = V_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{C}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda \boldsymbol{\alpha}\}$, 因此 $s_i = \dim V_{\lambda_i}$ 。

(2) $s_i \leqslant l_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ 。

3）矩阵可对角化的判别

（1）n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

（2）若 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

（3）n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的代数重数都等于几何重数。

4）求可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵

已知 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

第一步：求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

第二步：设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有不回的特征值, 对 $\lambda_k(k=1,2,\cdots,t)$, 求出与其相应的线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\eta}_{k1}, \boldsymbol{\eta}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{k,l_k} \quad \left(l_k = n - r\left(\lambda_k E_n - \boldsymbol{A}\right), l_1 + l_2 + \cdots + l_t = n\right)$$

第三步：令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_{11},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{1,l_1},\boldsymbol{\eta}_{21},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{2,l_2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{t1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{t,l_t})$, 有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && \lambda_1 &&&&&&& \\ &&& \lambda_2 &&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&& \\ &&&&& \lambda_2 &&&& \\ &&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&& \lambda_t && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& \lambda_t \end{pmatrix}$$

5）求 $\boldsymbol{A}^k$ （k 为正整数）

已知 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

第一步：求 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

为对角矩阵。

第二步：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}$, 推出

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$$

2. 线性变换可对角化

1）线性变换可对角化的定义

设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, 如果存在 V 的一组基，使得 σ 在该下的矩阵为对角矩阵, 就称 σ **可对角化**。

2）线性变换可对角化的判别

设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, σ 在 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值。

（1）σ 可对角化当且仅当 σ 有 n 个线性无关的特征向量。

（2）若 σ 有 n 个不同的特征值, 则 σ 可对角化。

（3）若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in P$, 则 σ 可对角化当且仅当对 $i = 1, 2, \cdots, k$, λ_i 的代数重数等于 λ_i 的几何重数。

注：λ_i 的几何重数 $= \dim V_{\lambda_i}$, 其中 $V_{\lambda_i} = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_i \boldsymbol{\alpha}\}$ 为 σ 的属于特征值 λ_i 的特行子空间, 也等于 $n - r(\lambda_i E_n - \boldsymbol{A})$, 即齐次线性方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的维数。而 λ_i 的代数重数等于 λ_i 作为 σ 的特征多项式 $f_\sigma(\lambda)$ 的根的重数。

（4）若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 中至少有一个不在数域 P 中, 则 σ 不可对角化。

3）求过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$ 及基

已知数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 可对角化, 求 V 的一组基, 使得 σ 在该基下的矩阵为对角矩阵, 并求过渡矩阵。

第一步：取定 V 一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 求出 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$。

第二步：求可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵, $\boldsymbol{T}$ 就是所求的过渡矩阵。

第三步：令 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 就是所求的基, σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵为对角矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 。

内容概要

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, σ 的全体像组成的集合称为 σ 的**值域**, 用 σV 表示;

V 中所有被 σ 变成零向量的向量组成的集合称为 σ 的**核**, 用 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 表示。

若用集合记号则

$$\sigma V=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{\alpha} \in V\}, \quad \sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\alpha} \mid \sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha} \in V\} \tag{19}$$

式(19)中的 σV 与 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 都是 V 的子空间。(σV 与 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 也可分别记为 $\operatorname{Im}\sigma$ 与 $\operatorname{Ker}\sigma$ 。)

（二）线性变换的秩与零度

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换。

σ 的值域 σV 的维数 $\dim(\sigma V)$ 称为 σ 的 **秩**;

σ 的核 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 的维数 $\dim\left(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\right)$ 称为 σ 的**零度**。

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换。

（1）令 $g(x), h(x) \in P[x], f(x) = g(x)h(x)$, 如果 $(g(x), h(x)) = 1$, 那么

$$(f(\sigma))^{-1}(\mathbf{0}) = (g(\sigma))^{-1}(\mathbf{0}) \oplus (h(\sigma))^{-1}(\mathbf{0})$$

（2）σ 可逆当且仅当 $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$, 且 $\sigma V = V$ 。

1. 重要结论

设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, σ 在 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 任取 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n \in V$ 。

（1）$\boldsymbol{\alpha} \in \sigma^{-1}(0)$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)'$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解。

（2）设 W 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解空间, 任取 $\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{n} b_i\boldsymbol{\alpha}_i \in \sigma^{-1}(\mathbf{0})$, 令

$$f : \sigma^{-1}(\mathbf{0}) \to W, \quad \boldsymbol{\beta} \mapsto \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

由（1）与线性空间同构的重要结论知 f 是双射, 且保持 V 的线性运算, 因此 f 是 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 到 W 的同构映射, 于是 $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) \cong W$ 。

（3）设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 那么 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间 W 的一组基, 令

$$\boldsymbol{\gamma}_k=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\,\boldsymbol{\eta}_k\quad(k=1,2,\cdots,n-r(\boldsymbol{A}))$$

由（2）知 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 是 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 的一组基, 于是

$$\dim\left(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\right)=n-r(\boldsymbol{A})$$

且

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}(\mathbf{0})=&L\left(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-r(\boldsymbol{A})}\right)\\=&\left\{k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+k_{n-r(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{\gamma}_{n-r(\boldsymbol{A})}\mid k_1,k_2,\cdots,k_{n-r(\boldsymbol{A})}\in P\right\}\end{aligned}$$

知 σ 的零度为 $n-r(\boldsymbol{A})$ 。

（4） $\sigma V = L\left(\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_n\right)\right), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_n\right)$ 的一个极大线性, 果存在) 就是 σV 的一组基， 而 $\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_n\right)$ 的秩等于 $r(\boldsymbol{A})$, 所以 σ 的秩为 $r(\boldsymbol{A})$。

（5） σV 的一组基的原像及 $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 的一组基合起来就是 V 的一组基, 因此

$$\dim(\sigma V) + \dim\left(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\right) = n$$

（6） σ 可逆当且仅当 $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$ 或 $\sigma V = V$ 。

2. $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 与 σV 的求法

1） $\sigma^{-1}(\mathbf{0})$ 的求法

若 $\sigma = o$, 则 $\sigma^{-1}(\mathbf{0}) = V$; 若 $\sigma \neq o$,

第一步：取定 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 求出 σ 在该基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 。

第二步：解齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$, 如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 那么如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解, 求出它的一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1\boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-(\boldsymbol{A})}$ 转第

第三步：令 $\boldsymbol{\gamma}_k = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\eta}_k(k = 1, 2, \ldots, n - r(\boldsymbol{A}))$, 的一组基, 于是

$$
\begin{aligned}
\sigma^{-1}(0) =& L\left(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n-r(\boldsymbol{A})}\right) \\
=& \left\{k_1\boldsymbol{\gamma}_1 + k_2\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + k_{n-r(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{\gamma}_{n-r(\boldsymbol{A})} \mid k_1, k_2, \cdots, k_{n-r(\boldsymbol{A})} \in P\right\}
\end{aligned}
$$

2） σV 的求法

若 $\sigma = o$, 则 $\sigma V = \{\mathbf{0}\}$; 若 $\sigma \neq 0$,

第一步：取定 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ ，求出 σ 在该基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 。

第二步：设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$, 求出 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\eta}_{i_1}, \boldsymbol{\eta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i_{(1)}}$, 得到 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的一个极大线性无关组 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{i_1}), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_{i_2}), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_{i_i(1)}\right)$, 也就是 σV 的一组基, 于是

$$
\begin{aligned}
\sigma V &= L\left(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{i_1}), \sigma(\boldsymbol{\alpha}_{i_2}), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_{i_{(41)}}\right)\right) \\
&= \left\{ l_{i_1}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{i_1}) + l_{i_2}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_{i_2}) + \cdots + l_{i_{(\lambda 1)}}\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_{i_1(\lambda)}\right) \mid l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots, l_{i_{(1)}} \in P \right\}
\end{aligned}
$$

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、线性变换的概念与判别

二、线性变换的运算、矩阵

三、特征值、特征向量与对角矩阵

四、线性变换的值域与核

五、线性变换的不变子空间

2 典型例题

知识点 1：线性变换的定义

知识点 2：线性变换的运算与矩阵

知识点 3：特征值、特征向量与对角矩阵

知识点 4：线性变换的值域与核

知识点 5：不变子空间

（一）不变子空间的定义

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, W 是 V 的子空间。如果 W 中的向量在 σ 的像仍在 W 中, 即对 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in W$, 都有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in W$ （也即 $\sigma(W) \subseteq W$ ）, 就称 W 是 σ 的**不变子空间**。

（二）不变子空间举例

（1）设 V 是数域 P 上的线性空间，那么 $\{\mathbf{0}\}$ 与 V 都是 V 的任一线性变换的不变子空间。

（2）设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, λ 是 σ 的任意一个特征值, 那么 σ 的特征子空间 $V_\lambda = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \in V\}$ 是 σ 的不变子空间。

（3）线性变换的循环子空间：设 σ 是数域 P 上的 $n > 0$ 维线性空间 V 的线性变换, 任取 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in V$, 必存在正整数 m, 使得 $\boldsymbol{\alpha}, \sigma(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \sigma^{m-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\alpha}, \sigma(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \sigma^{m}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性相关, 令 $W = L\left(\boldsymbol{\alpha}, \sigma(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \sigma^{m-1}(\boldsymbol{\alpha})\right)$, 则 W 是 σ 的不变子空间, 称 W 为 σ 的**循环子空间**。

1. 定义

设 σ 是数域 P 上的线性空间 V 的线性变换, W 是 σ 的不变子空间, 那么

$$\sigma|_W : W \to W, \boldsymbol{\alpha} \mapsto \sigma(\boldsymbol{\alpha}), \forall \boldsymbol{\alpha} \in W$$

是 W 上的线性变换, 称 $\sigma|_W$ 为 σ 在 W 上的限制。

2. 性质

设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, W 是 σ 的不变子空间, $0 < \dim W = m < n$, 取 W 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 将其扩充为 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 那么 σ 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $\sigma|_W$ 在 W 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 下的矩阵。

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、线性变换的概念与判别

二、线性变换的运算、矩阵

三、特征值、特征向量与对角矩阵

四、线性变换的值域与核

五、线性变换的不变子空间

2 典型例题

知识点 1：线性变换的定义

知识点 2：线性变换的运算与矩阵

知识点 3：特征值、特征向量与对角矩阵

知识点 4：线性变换的值域与核

知识点 5：不变子空间

例 7.1 在线性空间 P^n 中定义变换 $\sigma : \sigma\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \left(0, x_2, \cdots, x_n\right)$ 。证明: σ 是 P^n 的线性变换。

证明:【解题思路】用线性变换的定义或判别定理。

任取 $\boldsymbol{\alpha} = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right), \boldsymbol{\beta} = \left(b_1, b_2, \cdots, b_n\right) \in P^n, k, l \in P$, 有

$$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \left(ka_1 + lb_1, ka_2 + lb_2, \cdots, ka_n + lb_n\right)$$

于是

$$\begin{aligned}
\sigma(k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta}) &= \left(0, ka_2 + lb_2, \cdots, ka_n + lb_n\right) \\
&= k\left(0, a_2, \cdots, a_n\right) + l\left(0, b_2, \cdots, b_n\right) \\
&= k\sigma(\boldsymbol{\alpha}) + l\sigma(\boldsymbol{\beta})
\end{aligned}$$

因此 σ 是 P^n 的线性变换。

例 7.2 在 $\mathbf{R}^3$ 中定义变换 $\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1^2, x_2 + x_3, 0\right)$, 试证：$\sigma$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换。

证明：【解题思路】只需说明 σ 不满足线性变换定义中的某一条即可。

取 $\boldsymbol{\alpha}_0 = (1,0,0) \in \mathbf{R}^3$, 有 $2\boldsymbol{\alpha}_0 = (2,0,0)$, 于是 $\sigma(2\boldsymbol{\alpha}_0) = \sigma(2,0,0) = (4,0,0)$, 但 $2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_0) = 2\sigma(1,0,0) = 2(1,0,0) = (2,0,0)$, 所以 $\sigma(2\boldsymbol{\alpha}_0) \neq 2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_0)$, 因此命题成立。

例 7.3 在线性空间 $P^{n\times n}$ 中定义变换 $\sigma:\sigma(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}',\forall\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$, 证明: σ 是 $P^{n\times n}$ 上的对合线性变换, 即 σ 是满足 $\sigma^2=\imath$ （$P^{n\times n}$ 上的恒等变换）的线性变换。

证明:【解题思路】用线性变换的定义或判断定理及线性变换的相等。

任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in P^{n\times n},k,l\in P$, 有

$$\sigma(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})=(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})'=k\boldsymbol{A}'+l\boldsymbol{B}'=k\sigma(\boldsymbol{A})+l\sigma(\boldsymbol{B})$$

所以 σ 是 $P^{n\times n}$ 的线性变换。

因为 $\sigma^2(\boldsymbol{A})=\sigma(\sigma(\boldsymbol{A}))=\sigma\left(\boldsymbol{A}'\right)=\left(\boldsymbol{A}'\right)'=\boldsymbol{A}=\imath(\boldsymbol{A}),\forall\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$, 所以 $\sigma^2=\imath$ 。

例 7.4 （天津大学, 2007 年）设 V 是数域 P 上的线性空间, W_1, W_2 都是 V 的子空间, 且 $V = W_1 \oplus W_2, \sigma_1, \sigma_2$ 分别是 W_1 与 W_2 的线性变换, 定义法则 σ 如下:

$$\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right)=2\sigma_1\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)-3\sigma_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right), \forall \boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2$$

证明: σ 是 V 的线性变换。

证明: 【解题思路】首先说明 σ 是 V 的变换; 再用线性变换的定义或判别定理。

任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 因为 $V = W_1 \oplus W_2$, 所以存在唯一的 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 。又 σ_1, σ_2 分别是 W_1, W_2 上的线性变换, 知 $2\sigma_1\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) \in W_1$ 且唯一, $-3\sigma_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) \in W_2$ 且唯一, 进而有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right) = 2\sigma_1\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) - 3\sigma_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) \in V$ 且唯一, 于是对 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 存在 V 中唯一的元素 $2\sigma_1\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) - 3\sigma_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)$ 与之对应, 所以 σ 是 V 上的变换。

再任取 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 则存在唯一的 $\boldsymbol{\beta}_1 \in W_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in W_2$, 使得 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1 \in W_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2 \in W_2$, 而 σ_1, σ_2 分别是 W_1, W_2 上的线性变换, 且

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right)+\left(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1\right)+\left(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2\right)$$

所以

$$
\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= 2\sigma_1\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1\right)-3\sigma_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2\right) \\
&= \left(2\sigma_1\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)-3\sigma_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\right)+\left(2\sigma_1\left(\boldsymbol{\beta}_1\right)-3\sigma_2\left(\boldsymbol{\beta}_2\right)\right) \\
&= \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})
\end{aligned}
$$

对 $\forall k \in P$, 有 $k\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2, k\boldsymbol{\alpha}_1 \in W_1, k\boldsymbol{\alpha}_2 \in W_2$ 。又 σ_1, σ_2 分别是 W_1, W_2 上的线性变换, 得
$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=\sigma\left(k\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2\right)=2\sigma_1\left(k\boldsymbol{\alpha}_1\right)-3\sigma_2\left(k\boldsymbol{\alpha}_2\right)=k\left(2\sigma_1\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)-3\sigma_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\right)=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$, 因此命题成立。

例 7.5 （大连交通大学, 2014 年）在 $P^{n\times n}$ 中定义变换:

$$\sigma(X)=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{XD}\ (\forall X\in P^{n\times n},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in P^{n\times n}\text{ 取定})$$

证明:（1）σ 是线性变换。

（2）当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$ 时, σ 是可逆线性变换的充分必要条件为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵。

证明: （1）【解题思路】用线性变换的定义或判别定理。

对 $\forall k,l\in P,\forall X_1,X_2\in P^{n\times n}$, 有

$$\begin{aligned}\sigma\left(k\boldsymbol{X}_1+l\boldsymbol{X}_2\right)&=\boldsymbol{A}\left(k\boldsymbol{X}_1+l\boldsymbol{X}_2\right)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\left(k\boldsymbol{X}_1+l\boldsymbol{X}_2\right)+\left(k\boldsymbol{X}_1+l\boldsymbol{X}_2\right)\boldsymbol{D}\\&=k\left(\boldsymbol{AX}_1\boldsymbol{B}+\boldsymbol{CX}_1+\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{D}\right)+l\left(\boldsymbol{AX}_2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{CX}_2+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{D}\right)\\&=k\sigma\left(\boldsymbol{X}_1\right)+l\sigma\left(\boldsymbol{X}_2\right)\end{aligned}$$

所以 σ 是线性变换。

（2）【解题思路】用可逆线性变换的定义。

因为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$, 所以 $\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}, \forall \boldsymbol{X} \in P^{n\times n}$ 。

必要性：因为 $\sigma\sigma^{-1}\left(\boldsymbol{E}_n\right)=\sigma\left(\sigma^{-1}\left(\boldsymbol{E}_n\right)\right)=\boldsymbol{A}\left(\sigma^{-1}\left(\boldsymbol{E}_n\right)\right)\boldsymbol{B}=\imath\left(\boldsymbol{E}_n\right)=\boldsymbol{E}_n$, 所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵。

充分性：因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵, 令 $\tau(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{-1}$, 所以 τ 是 $P^{n\times n}$ 上的变换, 且对 $\forall \boldsymbol{X} \in P^{n\times n}$, 有

$$\sigma\tau(\boldsymbol{X})=\sigma(\tau(\boldsymbol{X}))=\sigma\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}B^{-1}\right)=\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{X}$$
$$\tau\sigma(\boldsymbol{X})=\tau(\sigma(\boldsymbol{X}))=\tau(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B})=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\boldsymbol{X}$$

所以 $\sigma\tau=\tau\sigma=\imath$, 知 σ 是可逆线性变换。

内容概要

例 7.6 设 σ 是线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换, 满足对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(x+y,y+z,z+x)$$

求 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 。

解: 【解题思路】用线性变换矩阵的定义或线性变换在不同基下矩阵之间的关系。

方法 1: 用线性变换的矩阵的定义。

设

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)&=x_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+x_{13}\boldsymbol{\alpha}_3\\
\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)&=x_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+x_{23}\boldsymbol{\alpha}_3\\
\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_3\right)&=x_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+x_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+x_{33}\boldsymbol{\alpha}_3
\end{aligned}$$

那么 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$, 且

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \boldsymbol{\alpha}_3'\right)\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}=\left(\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)', \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)', \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_3\right)'\right)。$$

由题设可知 $\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)=(1,2,1), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)=(1,1,2), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_3\right)=(2,1,1)$, 于是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

由式(20)得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

方法 2：用线性变换在不同基下矩阵之间的关系。

取 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为 $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

由 σ 的定义知 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(1,0,1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(1,1,0),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(0,1,1)$, 因此
$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 得 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$, 所以 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}&=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

方法 3：取 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \tag{21}$$

由式 (21) 得

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1} \tag{22}$$

由 σ 的定义得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=(1,2,1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=(1,1,2),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=(2,1,1)$, 所以

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix} \tag{23}$$

由式 (22)与式 (23) 得

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix} \tag{24}$$

由式 (24) 得 σ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例 7.7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性空间 V 的一组基, σ 是 V 的线性变换, 且

$$\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\boldsymbol{\alpha}_1, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$$

(1) 证明: σ 是可逆线性变换。

(2) 求 $2\sigma-\sigma^{-1}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵。

(1) **证明**: 【解题思路】用有限维线性空间上的线性变换可逆的判别定理。

由题设可知 σ 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因为 $|\boldsymbol{A}|=1 \neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 因此 σ 是可逆线性变换。

(2) **解**: $2\sigma-\sigma^{-1}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$
\begin{aligned}
2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

例 7.8 （天津大学, 2008 年）设 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1)$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$, 线性变换 τ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,1),\boldsymbol{\eta}_2=(1,2)$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}3&3\\2&4\end{pmatrix}$。

（1）求 $\sigma+\tau$ 在基底 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 下的矩阵。

（2）求 $\sigma\tau$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵。

（3）设 $\boldsymbol{\xi}=(3,3)$, 求 $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标。

（4）求 $\tau(\boldsymbol{\xi})$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 下的坐标。

解: （1）（2）【解题思路】利用线性变换在不同基下的矩阵之间的关系求出 τ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 及 σ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}_2$, 则可求出 $\sigma+\tau$ 在基底 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2$, $\sigma\tau$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ 。

取 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0), \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1)$, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\quad(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\tag{25}$$

由式(25) 得

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1\\\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\tag{26}$$

由式(26)得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1\\\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}\tag{27}$$

分别由式 (26)、式(27)知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 于是 σ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

τ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

（1）$\sigma+\tau$ 在基底 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ \frac{4}{3} & 3 \end{pmatrix}$$

（2）$\sigma\tau$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

（3）【解题思路】因为已经知道 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 所以只需需基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标。

因为 $\boldsymbol{\xi}=(3,3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。又 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 于是 $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐 $\boldsymbol{A}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

（4）解题思路与（3）相同。

因为 $\boldsymbol{\xi}=(3,3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 坐标为 $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ 。又 τ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}3&3\\2&4\end{pmatrix}$, 于是 $\tau(\boldsymbol{\xi})$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 下的坐标为 $\boldsymbol{B}_2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$。

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、线性变换的概念与判别

二、线性变换的运算、矩阵

三、特征值、特征向量与对角矩阵

四、线性变换的值域与核

五、线性变换的不变子空间

2 典型例题

知识点 1：线性变换的定义

知识点 2：线性变换的运算与矩阵

知识点 3：特征值、特征向量与对角矩阵

知识点 4：线性变换的值域与核

知识点 5：不变子空间

例 7.9 试求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与相应的特征向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化? 为什么?

解: 由于

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-5 & 3 \\ -4 & 1 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda-5 & 3 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^4,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,2,2$ 。

解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$, 其中 k_1, k_2 为任意不全为零的常数 (复数)。因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个不同的特征值就是 2 , 而特征值 2 的代数重数为 4, 几何重数为 4-r $(2E_4-\boldsymbol{A})=2<4$, 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化。

例 7.10 设 σ 是线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换, 满足对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(x+y,y+z,z+x)$$

(1) 求 σ 的特征值与相应的线性无关特征向量。

(2) σ 是否可对角化? 为什么?

解: (1) 取 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$, 由 σ 的定义知

$$\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\right)=(1,0,1),\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_2\right)=(1,1,0),\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_3\right)=(0,1,1) \tag{28}$$

由式(28) 有 $\sigma\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right)=\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 得 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 于是 σ 的特征多项式为

$$f_\sigma(\lambda)=f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\left|\lambda \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left(\lambda^2-\lambda+1\right) \tag{29}$$

由式 (29)知 σ 只有一个特征值 2 。对特征值 2 , 解齐次线性方程组 $\left(2 \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}$, 于是对特征值 2 得其线性无关的特征向量

$\boldsymbol{\gamma}=\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right) \boldsymbol{\eta}=\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right)\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}$ 。

（2）由（1）知 σ 的特征多项式的根不都是 σ 的特征值, 所以 σ 不存在 3 个线性无关的特征向量 (或 σ 的线性无关的特征向量的个数达不到 3 个), 因此 σ 不能对角化。

例 7.11 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$, 其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q} = (2, -1, 2)$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^{100}$ 。

解:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2, \quad -1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -4 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0, 0, 2$ 。

对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0, 解齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 2, 解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$。令 $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$。于是

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix} 2^{100} & -2^{99} & 2^{100} \\ 2^{101} & -2^{100} & 2^{101} \\ 2^{100} & -2^{99} & 2^{100} \end{pmatrix}$$

例 7.12 设 V 是数域 P 上的 3 维线性空间

$$\tau : V \to V, x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 \mapsto (x_1 + x_2)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (x_1 + x_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2 \text{ 线性变换}$$

问 τ 是否可对角化? 如果可对角化, 求 V 的一组基并求 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到该基的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$ 。

解: 由 τ 的定义知

$$\tau\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \tau\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \tau\left(\boldsymbol{\alpha}_3\right) = 0 \tag{30}$$

由式 (30) 得 τ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 于是 τ 的特征多项式为

$$f_\tau(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2) \tag{31}$$

由式(31) 知 τ 的特征值为 $0,0,2$ 。

对 τ 的特征值 0 , 解齐次线性方程组 $(0E_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得其一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{\gamma}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$, 那么 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 就是 τ 的属于其特征值 0 的线性无关特征向量。

对 τ 的特征值 2 , 解齐次线性方程组 $(2E_3-\boldsymbol{A})x=0$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 。令 $\boldsymbol{\gamma}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{\gamma}_3$ 是 τ 的属于其特征值 2 的线性无关的特征向量。

于是 τ 有 3 个线性无关特征向量 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$, 因此 τ 能够对角化, 且 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 是 V 的一组基, τ 在基 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 下的矩阵是对角矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ （因 $\tau(\boldsymbol{\gamma}_1)=0,\tau(\boldsymbol{\gamma}_2)=0,\tau(\boldsymbol{\gamma}_3)=2\boldsymbol{\gamma}_3$), 而 $(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 令

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{T}$ 就是所求的过渡矩阵。

例 7.13 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$。

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量。

（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化? 若可对角化, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵。

解: （1）$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda E_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 6 & 3 \\ 0 & \lambda+5 & 3 \\ 0 & -6 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,-2$

对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1 , 解齐次线性方程组 $(1E_3 - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = 0$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -2k_2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

式 (32) 中的 k_1, k_2 为不全为零的任意常数。

对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 -2, 解齐次线性方程组 $(-2E_3 - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的全部特征向量为

$$k_3\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} k_3 \\ k_3 \\ -k_3 \end{pmatrix} \tag{33}$$

式 (33) 中的 k_3 为不为零的任意常数。

（2）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关特征向量, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。令

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

那么 T 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ 为对角矩阵。

例 7.14 （浙江大学, 2014 年）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 问 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化并给出理由。若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化为 $\boldsymbol{C}$, 给出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}$ 。

解:

$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{E}_n \\ -\boldsymbol{E}_n & \lambda\boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}=|\lambda\boldsymbol{E}_n|\left|\lambda\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{E}_n\right|=\left|\lambda^2\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{E}_n\right|$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1, \lambda_{n+1}=\lambda_{n+2}=\cdots=\lambda_{2n}=-1$ 。

对 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$, 解齐次线性方程组 $(1\boldsymbol{E}_{2n}-\boldsymbol{A})\,x=0$，得其一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_{n+2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n=\boldsymbol{\varepsilon}_n+\boldsymbol{\varepsilon}_{2n} \tag{34}$$

式 (34) 中的 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)(i=1,2,\cdots,2n)$ 是 $2n$ 维单位向量。

对 $\lambda_{n+1}=\lambda_{n+2}=\cdots=\lambda_{2n}=-1$, 解齐次线性方程组 $(-1\boldsymbol{E}_{2n}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 得其一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}_{n+2}=\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_{n+2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{2n}=\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{\varepsilon}_{2n} \tag{35}$$

式 (35)中的 $\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)(i = 1, 2, \cdots, 2n)$ 是 $2n$ 维单位向量。由式 (7.34)、式 (7.35) 知 $\boldsymbol{A}$ 有 $2n$ 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n, \boldsymbol{\eta}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}_{n+2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{2n}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 且可逆矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n, \boldsymbol{\eta}_{n+1}, \boldsymbol{\eta}_{n+2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{2n})$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$$

例 7.15 (苏州大学, 2005 年) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 10 & -3 & 5\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 最大的特征值, 求 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征子空间的基。

解: $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ -10 & \lambda+3 & -5\\ -4 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2(\lambda-3)$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 最大的特征值为 3。

对 $\boldsymbol{A}$ 最大的特征值 3, 解齐次线性方程组 $(3\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于其最大特征值 3 的特征子空间的基。

例 7.16 （浙江大学, 2006 年）设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{E}_3,$$ 求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值与特征向量。

解：【解题思路】因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{*}+2\boldsymbol{E}_3\right)\boldsymbol{P}$, 所以先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量, 接着求出 $\boldsymbol{A}^{*}$, 进而求出 $\boldsymbol{A}^{*}+2\boldsymbol{E}_3$ 的特征值和特征向量, 最后求出 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和特征向量。

先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量。

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,7$ 。

$$f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)$$

对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1, 解齐次线性方程组 $(1\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 得其一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$ $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关特征向量。

对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 7, 解齐次线性方程组 $(7\boldsymbol{E}_3 - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 得其一个基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$ $\boldsymbol{\eta}_3$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 7 的线性无关特征向量。

再求 $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{A}^* + 2E_3$ 的特征值和特征向量。

因为 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\frac{7}{1} = 7, \frac{7}{1} = 7, \frac{7}{7} = 1$, 进而知 $\boldsymbol{A}^* + 2\boldsymbol{E}_3$ 的特征值为 $7+2=9, 7+2=9, 1+2=3$, $\boldsymbol{A}^* + 2\boldsymbol{E}_3$ 的属于特征值 9 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{A}^* + 2E_3$ 的属于特征值 3 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_3$ 。

最后求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和特征向量。

因为 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^{*}+2\boldsymbol{E}_{3}$ 相似, 所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $9,9,3$, $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 9 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_{1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_{2}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_{1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_{1}+k_{2}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_{2}=\begin{pmatrix}k_{1}-k_{2}\\-k_{1}-k_{2}\\k_{2}\end{pmatrix} \tag{36}$$

式 (36) 中的 k_{1},k_{2} 为任意两个不全为零的常数。

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 3 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} \tag{37}$$

式 (37) 中的 k_3 为任意不为零的常数。

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、线性变换的概念与判别

二、线性变换的运算、矩阵

三、特征值、特征向量与对角矩阵

四、线性变换的值域与核

五、线性变换的不变子空间

2 典型例题

知识点 1：线性变换的定义

知识点 2：线性变换的运算与矩阵

知识点 3：特征值、特征向量与对角矩阵

知识点 4：线性变换的值域与核

知识点 5：不变子空间

例 7.17 设 V 是数域 P 上的 3 维线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为它的一组基。线性变换求 τ 的核 $\tau^{-1}(\mathbf{0})$ 和值域 τV 。

$$\tau : V \to V, x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 \mapsto 2x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + 3x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4x_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

解: 由 τ 的定义知 $\tau(\boldsymbol{\alpha}_1)$

为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 而 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵, 所以 τ 是 V 上的可逆线性变换, 知 $\tau^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}, \tau V = V$ 。

例 7.18 (大连交通大学, 2014 年）设 σ 是 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换, 且

$$\sigma\left(x_1, x_2, x_3\right)=\left(x_1+2 x_2-x_3, x_2+x_3, x_1+x_2-2 x_3\right)$$

求:（1）值域 $\sigma\mathbf{R}^3$ 及它的一组基和维数。

（2）核 $\sigma^{-1}(0)$ 及它的一组基和维数。

解：取 $\mathbf{R}^3$ 的一组基 $\varepsilon_1=(1,0,0), \varepsilon_2=(0,1,0), \varepsilon_3=(0,0,1)$, 由 σ 的定义知

$$\sigma\left(\varepsilon_1\right)=(1,0,1), \sigma\left(\varepsilon_2\right)=(2,1,1), \sigma\left(\varepsilon_3\right)=(-1,1,-2)$$

得 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccc}1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2\end{array}\right)$。

（1） $\sigma\mathbf{R}^3 = L\left(\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\right), \sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_2\right), \sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_3\right)\right)$, 因为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组, 因此 $\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\right) = (1, 0, 1), \sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_2\right) = (2, 1, 1)$ 为 $\sigma\mathbf{R}^3$ 的一组基, 进而知

$$\sigma\mathbf{R}^3 = \left\{(k_1 + 2k_2, k_2, k_1 + k_2) \mid k_1, k_2 \in \mathbf{R}\right\}, \quad \dim\left(\sigma\mathbf{R}^3\right) = 2$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 得齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$, 进而得 $\sigma^{-1}(0)$ 的一组基

$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=(3,-1,1)$, 因此

$$\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{(3k,-k,k)\mid k\in\mathbf{R}\},\quad \dim\left(\sigma^{-1}(\mathbf{0})\right)=1$$

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

2 典型例题

例 7.19 设实数域 $\mathbf{R}$ 上的 2 维线性空间 V 的线性变换 σ 在 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-a & 0 \end{pmatrix}$, 求 σ 的所有不变子$\boxed{\mathrm{F}}$间。

解: $\{0\}, V$ 是 σ 的两个不变子空间。

设 W 是 σ 的任意一个不等于 $\{0\}, V$ 的不变子空间, 因为 $\dim V = 2$, 所以 $\dim W = 1$ 。设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 W 的一组基, 那么 $W = \{k\boldsymbol{\alpha} \mid k \in \mathbf{R}\}$ 。因为 W 是 σ 的不变子空间, 所以
$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in W$, 于是存在 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量, 知 W 是 σ 的特征子空间的 1 维子空间, 因此下面求 σ 的特征子空间。

因为 $f_\sigma(\lambda) = f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1+a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1-a)$, 所以

(1) 当 $a > 1$ 时, σ 没有特征值, 因此此时 σ 只有两个不变子空间 $\{0\}, V$。

(2) 当 $a < 1$ 时, σ 有两个不同的特征值 $\lambda_1 = \sqrt{1-a}, \lambda_2 = -\sqrt{1-a}$, 下面求 σ 的特征子空间 $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ (它们都是 1 维的。

1) 求 σ 的属于特征值 $\lambda_1=\sqrt{1-a}$ 的特征子空间 V_{λ_1} 。
对特征值 $\lambda_1=\sqrt{1-a}$, 解齐次线性方程组 $\left(\sqrt{1-a}\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,\sqrt{1-a})'$, 进而得到 V_{λ_1} 的一组基 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\sqrt{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2$, 于是 $V_{\lambda_1}=L\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\sqrt{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2\right)=\left\{k\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\sqrt{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2\right)\mid k\in\mathbf{R}\right\}$

2) 求 σ 的属于其特征值 $\lambda_2=-\sqrt{1-a}$ 的特征子空间 V_{λ_2} 。
对特征值 $\lambda_2=-\sqrt{1-a}$, 解齐次线性方程组 $\left(-\sqrt{1-a}E_2-\boldsymbol{A}\right)x=0$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,-\sqrt{1-a})'$, 进而得到 V_{λ_1} 的一组基 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\sqrt{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2$, 于是 $V_{\lambda_2}=L\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\sqrt{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2\right)=\left\{k\left(\boldsymbol{\alpha}_1-\sqrt{1-a}\boldsymbol{\alpha}_2\right)\mid k\in\mathbf{R}\right\}$ 。
因此当 $a<1$ 时, σ 有四个不变子空间 $\{0\},V,V_{\lambda_1},V_{\lambda_2}$ 。

（3）当 $a=1$ 时, σ 有两个相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 下面求 σ 的特征子空间 $V_{\lambda=0}$ 。

对特征值 0 , 解齐次线性方程组 $(0E_2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_3=(1,0)'$, 进而得到 $V_{\lambda=0}$ 的一组基 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1$, 于是 $V_{\lambda=0}=L(\boldsymbol{\alpha}_1)=\{k\boldsymbol{\alpha}_1\mid k\in\mathbf{R}\}$ 。

因此当 $a=1$ 时, σ 有三个不变子空间 $\{0\},V,V_{\lambda=0}$ 。

例 7.20 设 σ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 3 维线性空间 V 的一个线性变换, 对 V 的一组基 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 6\boldsymbol{\alpha}_2 + 6\boldsymbol{\alpha}_3, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) = 4\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \sigma(\boldsymbol{\alpha}_3) = -5\boldsymbol{\alpha}_1 - 4\boldsymbol{\alpha}_2 - 6\boldsymbol{\alpha}_3$, 设 $\tau = \sigma^3 - 5\sigma$, 求 τ 的一个非平凡的不变F空间。

解:【解题思路】若 λ 为 σ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 σ 的属于其特征值 λ 的特征向量, 则 $\lambda^3 - 5\lambda$ 就是 τ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 τ 的属于特征值 $\lambda^3 - 5\lambda$ 的特征向量, 进而 $L(\boldsymbol{\alpha})$ 就是 τ 的一个非平凡的不变子空间, 因此先求 σ 的特征值与相应的特征向量。

σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, 于是 σ 的特征多项式为

$$f_\sigma(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 & 5 \\ -6 & \lambda - 3 & 4 \\ -6 & -4 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)\left(\lambda^2 + 3\lambda + 4\right)$$

所以 3 是 σ 的特征值, 于是 $3^3 - 5 \cdot 3 = 12$ 是 τ 的特征值。

对 σ 的特征值 3 , 解齐次线性方程组 $(3\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$, 得其一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}8\\15\\12\end{pmatrix}$,

于是 $\boldsymbol{\alpha}=8\boldsymbol{\alpha}_1+15\boldsymbol{\alpha}_2+12\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 σ 的属于特征值 3 的线性无关特征向量, 进而
$\boldsymbol{\alpha}=8\boldsymbol{\alpha}_1+15\boldsymbol{\alpha}_2+12\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 τ 的属于其特征值 12 的线性无关特征向量, 因此得到 τ 的一个非平凡的不变子空间 $V_{\lambda=12}=\{a\boldsymbol{\alpha}\mid a\in\mathbf{R}\}$ 。