高等代数选讲
Selection of Advanced Algebra

第九讲：欧几里得空间
Lecture 9: Euclidean Spaces

主讲教师：艾武

数学与统计学院
School of Mathematics and Statistics
桂林理工大学
Guilin University of Technology

内容概要

1 知识点归纳与要点解析

一、内积与欧几里得空间的概念

二、有限维欧几里得空间

三、子空间的正交、正交补

四、正交变换

五、对称（反对称、共轭、非负对称）变换

六、向量到子空间的距离

七、欧几里得空间的同构

2 典型例题

知识点 1: 内积与欧几里得空间的概念与判别

知识点 2: 标准正交基与正交矩阵

知识点 3: 子空间的正交、正交补

知识点 4: 正交变换

知识点 5：对称（反对称、共轭、非负对称）变换

知识点 6: 向量到子空间的距离

内容概要

设 V 是**实数域 $\mathbf{R}$** 上的**线性空间**，在 V 上定义了一个**二元实函数**，称为**内积**，记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, 它具有以下性质：

对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$, 任意的 $k\in\mathbf{R}$,

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 时 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$ 。

这样的线性空间 V 称为**欧几里得空间**。

注：

（1）实数域上同一线性空间 V 中, 定义的内积不同, 得到不同的欧几里得空间。

（2）在欧几里得空间中, 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 与 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$ 是等价命题, 这个命题给出欧几里得空间中证明向量为零向量的方法。

（3）设 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 的充分必要条件为对 $\forall\boldsymbol{\beta}\in V$, 有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$ 。

（4）欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的内积（如无特殊说明）指的是, 对 $\mathbf{R}^n$ 中任意

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

向量的长度

设 V 是任一欧几里得空间。

（1）对任意向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 将**非负实数** $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度**, 记为 $|\boldsymbol{\alpha}|$, 且显然有

$$|k\boldsymbol{\alpha}| = |k||\boldsymbol{\alpha}|, \quad \forall k \in \mathbf{R}$$

（2）长度为 1 的向量称为**单位向量**。任取 $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\alpha} \in V$, 得单位向量 $\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$, 称为对向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位化。

（3）**柯西-布涅科夫斯基不等式**: 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ ，有

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leqslant |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}| \tag{1}$$

在式(1)中, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关时，等号才成立。

在欧几里得空间 V 中,

（1）非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角** $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 规定为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|},\quad 0\leqslant\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\leqslant\pi$$

（2）如果 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$, 称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ **正交**或**垂直**, 记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ 。

（3）如果向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ **正交**，那么

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|^2=|\boldsymbol{\alpha}_1|^2+|\boldsymbol{\alpha}_2|^2 \tag{2}$$

式(2) 被称为**勾股定理**, 且可推广为：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 两两正交, 那么

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m|^2=|\boldsymbol{\alpha}_1|^2+|\boldsymbol{\alpha}_2|^2+\cdots+|\boldsymbol{\alpha}_m|^2 \tag{3}$$

向量间的距离

设 V 是一个欧几里得空间, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$ 。

1）距离的定义

将 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$ 称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**距离**，记为 $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 。

2）距离的性质

（1）$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=d(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$

（2）$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \geqslant 0$, 并且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 时等号成立

（3）$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \leqslant d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})+d(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$ （**三角不等式**）

内容概要

正交组

1）正交组的定义

欧几里得空间 V 中**一组非零向量**（向量组中每个向量都不是零向量），如果它们**两两正交**，称之为一个**正交向量组**，简称为**正交组**。

2）正交组的性质

性质 1：单个非零向量所组成的向量组是正交组。

性质 2：正交组线性无关, 因而 n 维欧几里得空间中, 两两正交的非零向量不能超过 n 个。

正交基与标准正交基

1）正交基与标准正交基的定义

n 维欧几里得空间 V 中, 由 n 个向量组成的正交向量组称为**正交基**； 由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**。

2）正交组与正交基的关系

n 维欧几里得空间的任一正交组都能扩充成一组正交基。

3）标准正交基的判别

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 n 维欧几里得空间 V 的一组基, 则下列条件等价。

（1） $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的标准正交基。

（2） $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$ 。

（3）对 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)\,\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\,\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 。

（4）任取 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\quad \boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + y_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$, 有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

4）标准正交基的求法

由 n 维欧几里得空间的任意一组基, 都可用**施密特正交化**方法得到一组标准正交基, 具体过程如下。

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维欧几里得空间 V 的一组基。

第一步：正交化。令

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \\
&\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 \\
&\cdots\cdots \\
&\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_n - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1}, \boldsymbol{\beta}_{n-1})}\boldsymbol{\beta}_{n-1}
\end{aligned}
$$

第二步：单位化。令 $\boldsymbol{\eta}_i = \frac{\boldsymbol{\beta}_i}{|\boldsymbol{\beta}_i|}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 。故 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 就是 V 的一组标准正交基。

注：对如上得到的标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$, 有

$$
L(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_i) = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i), (i = 1, 2, \cdots, n)
$$

1）正交矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实方阵，若 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**。

2）正交矩阵的性质及判别

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}^*$ 均为正交矩阵。

（2）两个 n 级正交矩阵的乘积仍是正交矩阵。

（3）正交矩阵的实特征值为 ± 1 。

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组及列向量组都是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基。

3）标准正交基与正交矩阵

在 n 维欧几里得空间 V 中, 由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵;

反过来, 如果第一组基是标准正交基, 同时过渡矩阵是正交阵, 那么第二组基也是标准正交基。

基的度量矩阵的定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维欧几里得空间 V 的一组基, 矩阵

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix} \tag{4}$$

称为基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的**度量矩阵**。

基的度量矩阵的性质

性质 1: 任取 n 维欧氏空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$, 对 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\xi}_1 + x_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\xi}_n$, $\boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\xi}_1 + y_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{\xi}_n$, 有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (x_1, x_2, \cdots x_n)\, \boldsymbol{G}\, (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

由式 (5)可见, 给出基的度量矩阵及向量在该基下的坐标之后, 任意两个向量的内积随之确定, 这也是引入基的度量矩阵的意义所在。

性质 2: 设欧几里得空间 V 的两组基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的度量矩阵分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 且 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)\, \boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 即**欧几里得空间不同基的度量矩阵彼此是合同的**。

性质 3：（1）**基的度量矩阵是正定矩阵**, 特别地, 标准正交基的度量矩阵是单位矩阵。

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是任 n 级正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可看成 n 维欧几里得空间某个基的度量矩阵。

证明：由内积的定义、式(5) 及标准正交基的定义知（1）成立。

下面证明（2）成立。因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵, 所以它与 n 级单位矩阵合同。令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}, |\boldsymbol{C}|\neq 0$ 。

任取 V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$, 由（1）知, 其度量矩阵是单位矩阵。令 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{C}$, 由性质 2 知， 基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$ 。

1. 格拉姆矩阵的定义

对欧几里得空间 V 中任一向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ （不一定是 V 的基），称式 (4) 中的矩阵 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的**格拉姆矩阵**。

2. 格拉姆矩阵的性质

性质 1：格拉姆矩阵具有半正定性。

性质 2：设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 维欧几里得空间 V 的标准正交基, 而 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的格拉姆矩阵

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} \tag{6}$$

进而有

$$r(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)) = r(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A})$$

而 $r(\boldsymbol{A})$ 等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_1' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{A}_2' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_2' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_n' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_n' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_n' \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{A}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1' \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1' \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_1' \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{A}_2' \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2' \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_2' \boldsymbol{A}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_n' \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_n' \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_n' \boldsymbol{A}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1' \\ \boldsymbol{A}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}' \boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

知式(6)成立。

结合 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}), (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) \boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关, 得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关当且仅当 $r(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)) < n$ ， 当且仅当 $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)| = 0$ 。

内容概要

向量与子空间正交

设 V_1 是欧几里得空间 V 的子空间, $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 如果对任意的 $\boldsymbol{\beta} \in V_1$, 恒有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与子空间 V_1 **正交**。

1. 子空间正交的定义

设 V_1, V_2 是欧几里得空间 V 的两个子空间, 若对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\beta} \in V_2$, 恒有 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称 V_1, V_2 **正交**, 记为 $V_1 \perp V_2$ 。

2. 生成子空间正交的判别

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) \perp L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_i \perp \boldsymbol{\beta}_j (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2 \cdots, n)$。

3. 正交子空间的性质

由 $V_1 \perp V_2$ 可知 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 从而 $V_1 + V_2$ 是直和。

更一般地, 如果子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交, 那么 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 是直和。

设 V_1, V_2 是欧几里得空间 V 的两个子空间。

1. 子空间正交补的定义

子空间 V_2 称为子空间 V_1 的一个正交补, 如果 $V_1 \perp V_2$, 并且 $V_1 + V_2 = V$, 此时 V_1 也是 V_2 的 **正交补**。

2. 关于子空间正交补需注意的结论

（1）**欧几里得空间的每个有限维子空间都存在唯一的正交补**, 于是 n 维欧几里得空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补, 因此将 V_1 的正交补记为 $V_1^{\perp}$ 。

（2）欧几里得空间 V 的子空间 V_1 的正交补 $V_1^{\perp}$ 恰好由 V 中所有与 V_1 正交的向量组成的, 即

$$V_1^{\perp} = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \boldsymbol{\alpha} \text{ 与} V_1 \text{ 正交}\} = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \forall \boldsymbol{\beta} \in V_1\}$$

3. 求子空间正交补的常用方法

设 W 是 n 维欧几里得空间 V 的 r 维子空间 $(1 \leqslant r < n)$, 求 W 正交补的常用方法如下。

方法 1:

第一步: 取 W 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, **扩充**为 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 。

第二步: 用**施密特正交化**方法将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 化为正交基 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$, 则

$$\begin{aligned} W &= L\left(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\right), \\ W^{\perp} &= L\left(\boldsymbol{\beta}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\right) \end{aligned}$$

方法 2：若 $W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$, 则 $W^{\perp} = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, r\}$ 。

于是, 若 V 等于 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$, 则 $W^{\perp}$ 恰为齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间。

内容概要

欧几里得空间 V 的**线性变换** σ 称为**正交变换**, 如果它**保持向量的内积不变**, 即对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 都有

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

注：由此定义可知, **正交变换保持任意两个向量的夹角不变**, 但保持夹角不变的线性变换不一定是正交变换（例如 $k \neq 1$, 欧几里得空间 V 的数乘变换 $k\imath : \boldsymbol{\alpha} \to k\boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$ ）。

设 σ 是欧几里得空间 V 上的线性变换，则下列命题等价。

（1）σ 是正交变换。

（2）任给 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $|\sigma(\boldsymbol{\alpha})| = |\boldsymbol{\alpha}|$ 。

当 V 是 n 欧几里得空间时,

（3）若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交基, 则 $\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_r\right), \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_{r+1}\right), \cdots, \sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_n\right)$ 也是标准正交基。

（4）σ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

正交变换的性质

性质 1： 正交变换是可逆的, 其逆变换仍是正交变换。

性质 2： 同一个欧几里得空间的两个正交变换的乘积是正交变换。

性质 3： 有限维欧几里得空间的正交变换的行列式等于 ± 1 。行列式等于 1 的称为**第一类正交变换**, 行列式等于 -1 的称为**第二类正交变换**。

内容概要

1. 对称变换的定义

设 V 是一个欧几里得空间, σ 是 V 的一个线性变换, 若任给 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \sigma(\boldsymbol{\beta}))$, 则称 σ 为**对称变换**。

2. 对称变换的性质

性质 1: $n \geqslant 1$ 维欧几里得空间的对称变换在任一标准正交基下的矩阵都是**实对称矩阵**。

性质 2: 若 σ 是欧几里得空间 V 的对称变换, W 是 σ 的不变子空间, 则 $W^{\perp}$ 也是 σ 的**不变子空间**。

（1）实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数。

（2）实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交。

（3）对任一 n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 都存在 n 级正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数，则 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵。

证明：因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数, 所以存在正交阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为三角矩阵。不妨设 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为上三角矩阵, 又 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{T}$ 是正交矩阵, 而正交矩阵的逆矩阵是正交

矩阵, 正交矩阵之积仍是正交矩阵, 所以 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为正交的上三角矩阵, 从而 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 是主对角线元素为 1 或 -1 的对角矩阵。令

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

式 (7) 中的 $a_j=1$ 或 $-1(j=1,2,\cdots,n)$ 。有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\boldsymbol{T}'$$

推出 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵。

如果线性替换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \tag{8}$$

式(8) 的系数矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{nn}$ 是正交矩阵, 称其为**正交线性替换**, 正交线性替换是非退化的。

任意一个实二次型

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

式(9)都可以经过正交线性替换变成平方和（标准形）

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 \tag{10}$$

式(10)中平方项的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是实二次型 (9)的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$ 的特征多项式的全部根, 也即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值。

1. 反对称变换的定义

设 V 是一个欧几里得空间, σ 是 V 的一个线性变换, 若任给 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}, \sigma(\boldsymbol{\beta}))$, 则称 σ 为**反对称变换**。

2. 反对称变换的性质

（1）反对称变换在任一标准正交基下的矩阵是反对称矩阵。

（2）若 σ 是欧几里得空间 V 的反对称变换, W 是 σ 的不变子空间, 则 $W^{\perp}$ 也是 σ 的不变子空间。

3. 反对称矩阵

（1）实反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是零或纯虚数。

（2）实反对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的平方为实对称矩阵, 因此 $\boldsymbol{A}^2$ 在实数域上可对角化。

1. 共轭变换的定义

设 V 是一个欧氏空间, σ 是 V 的一个线性变换, 若存在唯一的线性变换 σ^*, 使得对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 均有 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \sigma^*(\boldsymbol{\beta}))$, 称 σ^* 为 σ 的**共轭变换**。

2. 共轭变换的性质

(1) σ 是对称变换的充分必要条件是 $\sigma^* = \sigma$ 。

(2) σ 是正交变换的充分必要条件是 $\sigma\sigma^* = \sigma^*\sigma = \imath$ (单位变换)。

(3) $(\sigma^*)^* = \sigma$。

(4) $(k\sigma)^* = k\sigma^*$ (k 为实数)。

(5) $(\sigma_1 + \sigma_2)^* = \sigma_1^* + \sigma_2^*$ 。

（6）$(\sigma_1\sigma_2)^* = \sigma_2^*\sigma_1^*$ 。

（7）设 σ 为 n 维欧几里得空间 V 的一个线性变换, 若 σ 在 V 的标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 σ 的共轭变换 σ^* 在这组基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}'$ 。

1. 非负对称变换的定义

设 σ 是欧几里得空间 V 的一个对称变换, 若对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 均有 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$, 则称 σ 为**非负对称变换**。

2. 非负对称变换的性质

(1) 若 σ_1,σ_2 都是欧几里得空间 V 的非负对称变换, k_1,k_2 是两个非负实数, 则 $k_1\sigma_1+k_2\sigma_2$ 也是非负对称变换。

(2) 任意线性变换 σ 与其共轭变换 σ^* (若存在) 的乘积 $\sigma\sigma^*$ $\sigma^*\sigma$ 都是非负对称变换。

(3) 设 σ 为 n 维欧几里得空间 V 的一个对称变换, 则 σ 为非负对称变换的充分必要条件是 σ 的特征值都是非负实数。

正定变换

1. 正定变换的定义

设 σ 为 n 维欧几里得空间 V 的一个对称变换, 若对 V 中任意非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 均有 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) > 0$, 则称 σ 为**正定变换**。

2. 正定变换的判别

n 维欧几里得空间 V 的对称变换 σ 是正定变换的充分必要条件是 σ 在 V 的标准正交基下的矩阵为**正定矩阵**。

内容概要

生成子空间的正交补

设 V 是一个欧几里得空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k \in V, W = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k)$, 且 $W^{\perp}$ 存在, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\alpha} \in W^{\perp}$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 。

向量到子空间的距离

设 W 是 n 维欧几里得空间 V 的一个 t 维子空间 $(0 < t < n)$, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 存在唯一的 $\boldsymbol{\beta} \in W$, 使得

$$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}| = \min_{\boldsymbol{\gamma} \in W} |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma}| = \min_{\boldsymbol{\gamma} \in W} d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{11}$$

证明: 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_t$ 是 W 的标准正交基, $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+2}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 $W^{\perp}$ 的标准正交基, 则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的标准正交基, 于是存在唯一的 $\boldsymbol{\beta} \in W, \boldsymbol{\eta} \in W^{\perp}$, 使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)\, \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_t)\, \boldsymbol{\varepsilon}_t + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1})\, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\, \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{aligned} \tag{12}$$

由式 (12)中 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式的唯一性知 $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)\, \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_t)\, \boldsymbol{\varepsilon}_t$,
$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1})\, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 。

任取 $\boldsymbol{\gamma} \in W$, 有 $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} \in W$, 而 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta} \in W^{\perp}$, 因此有 $(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}) = 0$ 。由勾股定理式 (2)得

$$|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma}|^2 = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|^2 + |\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}|^2 \tag{13}$$

由式 (13) 可得式 (11)。

将式 (11) 中的 $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 到子空间 W 的**距离**, 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在子空间 W 上的**内射影**。

注意 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta} \in W^{\perp}$, 于是向量到子空间各向量的距离以垂线最短。

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s - b_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s - b_n = 0 \end{cases} \tag{14}$$

$(a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, s)$ 式 (14) 可能无解, 即任何一组实数

$$x_1, x_2, \cdots, x_s$$

都可能使

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{is}x_s - b_i)^2 \tag{15}$$

不等于零。

找一组实数 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_s^0$ 使式 (15) 最小, 这样的 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_s^0$ 称为线性方程组式 (14) 的最小二乘解，该问题就称为**最小二乘解问题**。

线性方程组(14) 的最小二乘解满足线性方程组

$$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{b} \tag{16}$$

式(16) 中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{ns} \in \mathbf{R}^{n\times s}$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)' \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_s)'$, 因此欲求线性方程组 (14)的**最小二乘解**, 只需求解线性方程组 (16), 而线性方程组 (16) 总有解。

内容概要

欧几里得空间 V 与 V' 称为**同构**的, 如果由 V 到 V' 有一个**双射** σ, 满足

(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$;

(2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$;

(3) $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 。

这里 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\forall k\in\mathbf{R}$, 这样的映射 σ 称为欧几里得空间 V 到 V' 的**同构映射**。

欧几里得空间同构的判别

有限维欧几里得空间同构的充分必要条件是它们的维数相等。

内容概要

例 9.1 设实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间 $V=\mathbf{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{S}$ 是 n 级正定矩阵, 对任意 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in V$, 定义 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}')$, 求证: V 对如上定义的 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 构成欧几里得空间。

证明: 【解题思路】用欧几里得空间的定义。

(1) 如上定义的 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 是 V 上的一个二元实函数, 即 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 是 $V\times V$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射。

(2) 由于 $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}')'=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}'$, 于是 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}')=\operatorname{tr}(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}')$, 因此 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ 。

(3) $\forall k\in\mathbf{R}$, $(k\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\operatorname{tr}(k\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}')=k\operatorname{tr}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}')=k(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 。

(4) $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=\operatorname{tr}((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{S}\boldsymbol{Z}')=\operatorname{tr}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Z}')+\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{Z}')=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})+(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ 。

（5）将 $\boldsymbol{X}$ 按行分块为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_m\end{pmatrix}$, 得

$$\boldsymbol{XSSX}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_m\end{pmatrix}\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{X}_2' & \cdots & \boldsymbol{X}_m{}')\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_1' & \cdots & \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_m{}'\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{X}_m\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_1' & \cdots & \boldsymbol{X}_m\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_m{}'\end{pmatrix}$$

那么

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{XSX}')=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_i'$$

由 $\boldsymbol{S}$ 是 n 级实正定矩阵, 知 $\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_i'\geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{0}$, 因此 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})\geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_2=\cdots=\boldsymbol{X}_m=\boldsymbol{0}$ 。也就是说, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$, 所以 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 是 V 的欧几里得内积, 因此 V 对 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 构成欧几里得空间。

例 9.2 n 维欧几里得空间 V 中, 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\sigma$ 为 V 的线性变换, 若规定二元函数 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))$, 问 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 是否为内积?

解:【解题思路】用内积定义。

当 σ 为非可逆变换时, 存在 $\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$, 而 $\sigma(\boldsymbol{\gamma})=\mathbf{0}$, 即有 $\boldsymbol{\gamma}\neq 0$, 而 $\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}\rangle=(\sigma(\boldsymbol{\gamma}),\sigma(\boldsymbol{\gamma}))=0$, 此时 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 不为内积。

当 σ 为可逆变换时, 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0$ 当且仅当 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=0$, 当且仅当 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 且 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\alpha}))\geqslant 0$ 。

对 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V,\forall k\in\mathbf{R}$, 有

$$
\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle&=(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\sigma(\boldsymbol{\beta}),\sigma(\boldsymbol{\alpha}))=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle\\
\langle k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle&=(\sigma(k\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=k(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\\
\langle\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}\rangle&=(\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)+\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right),\sigma(\boldsymbol{\beta}))\\
&=(\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right),\sigma(\boldsymbol{\beta}))+(\sigma\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}\rangle
\end{aligned}
$$

所以 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 构成 V 的内积。

例 9.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是任意 n 维实列向量, 证明:

$$(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant (\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\right)$$

证明: 由 $\boldsymbol{A}$ 正定, 存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$ 。在 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 由柯西-布涅柯夫斯基不等式, 得

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\right) &= (\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha})\left(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{C}^{-1}\left(\boldsymbol{C}'\right)^{-1}\boldsymbol{\beta}\right) \\
&= (\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha})\left(\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)'\boldsymbol{\beta}, \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)'\boldsymbol{\beta}\right) \\
&\geqslant \left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}, \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)'\boldsymbol{\beta}\right)^2 \\
&= \left(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{C}'\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)'\boldsymbol{\beta}\right)^2 \\
&= (\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta})^2
\end{aligned}$$

例 9.4 设 V 是 n 维欧几里得空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基, 证明: 对于任意 n 个实数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 恰有一个向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_i) = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 。

证明: $\forall b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbf{R}$, 设 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_i) = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 。分别用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与等式 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 两边作内积得

$$\left\{\begin{array}{c} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) x_1 + (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) x_2 + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) x_n = b_1 \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) x_1 + (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) x_2 + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_n) x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) x_1 + (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_2) x_2 + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) x_n = b_n \end{array}\right. \tag{17}$$

线性方程组 (17) 的系数阵为基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的度量阵, 它是一个正定矩阵, 行列式大于 0 , 所以方程组有唯一解, 命题得证。

内容概要

例 9.5 $\mathbf{R}$ 表示实数域, 在欧几里得空间 $\mathbf{R}^4=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\mid a_i\in\mathbf{R}\}$ 中, 其内积

$$((a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4))=\sum_{i=1}^{4}a_ib_i$$

令 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 求 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\in\mathbf{R}^4$, 使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\mathbf{R}^4$ 的标准正交基。

解: 令 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, 由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=0,(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=0$, 得

$$\left\{\begin{array}{l}x_1=0\\ \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{\sqrt{2}}x_4=0\end{array}\right.\tag{18}$$

解齐次线性方程组 (18)并注意到 $|\boldsymbol{\alpha}_3|=1$, 得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$。

再令 $\boldsymbol{\alpha}_4=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, 由 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_4)=0(i=1,2,3)$, 以及 $|\boldsymbol{\alpha}_4|=1$, 得 $\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{1}{2}(0,-1,-1,\sqrt{2})$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\mathbf{R}^4$ 的一组标准正交基。

例 9.6 证明: 每个非奇异实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必可表示为一个正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的乘积, 即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$$

证明: 由 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异实矩阵, 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$ 正定, 于是存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}^2$ 。

令 $\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}'\right)^{-1} = \boldsymbol{Q}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$, 而 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{E}$, 所以 $\boldsymbol{Q}$ 正交。

内容概要

例 9.7 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$ 是 n 级可逆实矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素组成的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$, $V=L(\boldsymbol{\alpha})$ 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的子空间, 求 V 在 $\mathbf{R}^n$ 中的正交补 $V^{\perp}$ 。

解: 因为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$ 是 n 级可逆实矩阵, 所以存在正整数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$, 使得 $a_{1k}\neq 0$ 。而

$$V^{\perp}=\{\boldsymbol{\beta}\mid\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n,(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=0\}$$

所以，若令 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 则 $V^{\perp}$ 恰好为齐次线性方程组

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \tag{19}$$

的解空间, 解齐次线性方程组 (19), 得到其一个基础解系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 & = \left(1, 0, \cdots, 0, -\frac{a_{11}}{a_{1k}}, 0, \cdots, 0\right) \\ & \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_{k-1} & = \left(0, \cdots, 0, 1, -\frac{a_{1k-1}}{a_{1k}}, 0, \cdots, 0\right) \\ \boldsymbol{\beta}_k & = \left(0, \cdots, 0, -\frac{a_{1k+1}}{a_{1k}}, 1, 0, \cdots, 0\right) \\ & \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_{n-1} & = \left(0, \cdots 0, -\frac{a_{1n}}{a_{1k}}, 0, \cdots, 0, 1\right) \end{cases}$$

于是 $V^{\perp} = L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-1})$, 且 $\dim V^{\perp} = n - 1$ 。

例 9.8 在 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 定义向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 正交为 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i=0$ 。证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中 $n-1$ 个线性无关的向量, 而向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 分别与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 正交, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关。

证明: 令 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})$, 则 $\dim V_1=n-1$, 所以 $\dim V_1^{\perp}=1$, 而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in V_1^{\perp}$, 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关。

内容概要

例 9.9 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维欧几里得空间 V 的两组标准正交基, $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_1, k = |\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1|, \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{k}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1), \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 定义 $\tau(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} - 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}$ 。证明:

（1）τ 是正交变换, $\tau(\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\beta}_1$ 。

（2）$L(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = L(\tau(\boldsymbol{\alpha}_2), \tau(\boldsymbol{\alpha}_3), \cdots, \tau(\boldsymbol{\alpha}_n))$ 。

证明：（1）τ 是 V 上的变换, 且对 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, \forall k \in \mathbf{R}$,

$$
\begin{aligned}
\tau(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) &= \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} \\
&= \boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\beta}-2(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} \\
&= \tau(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\beta}) \\
\tau(k\boldsymbol{\alpha}) &= k\boldsymbol{\alpha}-2(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} = k(\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}) = k\tau(\boldsymbol{\alpha}) \\
|\tau(\boldsymbol{\alpha})|^2 &= (\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}) \\
&= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})-4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})^2+4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta})^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2
\end{aligned}
$$

所以 τ 是正交变换。

$$k^2 = |\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1|^2 = (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1) = 2 - 2(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1)$$

于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1) = 1 - \frac{k^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\tau(\boldsymbol{\alpha}_1) &= \boldsymbol{\alpha}_1 - 2(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} \\
&= \boldsymbol{\beta}_1 + k\boldsymbol{\eta} - 2(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} \\
&= \boldsymbol{\beta}_1 + \left(k - 2\left(\boldsymbol{\alpha}_1, \frac{1}{k}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1)\right)\right)\boldsymbol{\eta} \\
&= \boldsymbol{\beta}_1 + \left(k - \frac{2}{k}(\boldsymbol{\alpha}_1, (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}_1))\right)\boldsymbol{\eta} \\
&= \boldsymbol{\beta}_1 + \left(k - \frac{2}{k}\left(1 - \left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\right)\right)\boldsymbol{\eta} \\
&= \boldsymbol{\beta}_1
\end{aligned}$$

（2）因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准正交基，τ 是正交变换, 所以 $\tau(\boldsymbol{\alpha}_1), \tau(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \tau(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 也是标准正交基，因此

$$L(\tau(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \tau(\boldsymbol{\alpha}_n)) = L(\tau(\boldsymbol{\alpha}_1))^{\perp} = L(\boldsymbol{\beta}_1)^{\perp} = L(\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$$

内容概要

七、欧几里得空间的同构

1 知识点归纳与要点解析

一、内积与欧几里得空间的概念

二、有限维欧几里得空间

三、子空间的正交、正交补

四、正交变换

五、对称（反对称、共轭、非负对称）变换

六、向量到子空间的距离

2 典型例题

知识点 1: 内积与欧几里得空间的概念与判别

知识点 2: 标准正交基与正交矩阵

知识点 3: 子空间的正交、正交补

知识点 4: 正交变换

知识点 5：对称（反对称、共轭、非负对称）变换

知识点 6: 向量到子空间的距离

例 9.10 欧几里得空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的内积为对 $\mathbf{R}^{n\times\times n}$ 中任意两个矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{nn}, \boldsymbol{Y}=(y_{ij})_{nn}$, $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y})$ $W_1=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n},\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}\}, W_2=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n},\boldsymbol{A}$ 为幂零上三角矩阵 $\}$ 是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的两个子空间, 问 $W_1^{\perp},W_2^{\perp}$ 分别由什么样的矩阵构成?

解: 任意 n 级方阵 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})$ 和 $\boldsymbol{E}_{pq}$ 的内积 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{E}_{pq})=x_{pq}$ ($\boldsymbol{E}_{pq}$ 为第 p 行、第 q 列位置的元素为 1 , 其他位置的元素皆为 0 的 n 级方阵)。

对称阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$ 可写成 $\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\boldsymbol{E}_{ii}+\sum_{j<k}a_{jk}(\boldsymbol{E}_{jk}+\boldsymbol{E}_{kj})$, 即 W_1 可由 $\{\boldsymbol{E}_{ii},\boldsymbol{E}_{jk}+\boldsymbol{E}_{kj}\}$ $(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j<k\leqslant n)$ 生成, 于是 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{nn}\in\boldsymbol{W}_1^{\perp}$ 当且仅当 $0=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{E}_{ii})=x_{ii}$, 且 $0=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{E}_{jk}+\boldsymbol{E}_{kj})=x_{jk}+x_{kj}$, 所以 $W_1^{\perp}$ 为 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的全体反对称矩阵构成的 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间, 即

$$W_1^{\perp}=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n},\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}\}$$

幂零上三角矩阵形式为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} a_{jk} \boldsymbol{E}_{jk}$, 即 $\boldsymbol{W}_2$ 由 $\boldsymbol{E}_{jk}(1 \leqslant j < k \leqslant n)$ 生成, 于是 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{nn} \in W_2^{\perp}$ 当且仅当 $0 = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{E}_{jk}) = x_{jk}(1 \leqslant j < k \leqslant n)$, 所以 $\boldsymbol{W}_2^{\perp}$ 为 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 中的全体下三角矩阵构成的 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的子空间。

例 9.11 设 σ,τ 都是欧几里得空间 V 的对称变换。证明：$\sigma\tau+\tau\sigma$ 也是 V 的对称变换。

证明：因为 σ,τ 都是欧几里得空间 V 的对称变换, 所以 $\sigma\tau+\tau\sigma$ 是 V 的线性变换, 且对 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,

$$\begin{aligned}((\sigma\tau+\tau\sigma)(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta}) &= (\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})+\tau\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha})),\boldsymbol{\beta})+(\tau(\sigma(\boldsymbol{\alpha})),\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\tau(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))+(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\tau(\boldsymbol{\beta})) \\ &= (\boldsymbol{\alpha},\tau\sigma(\boldsymbol{\beta}))+(\boldsymbol{\alpha},\sigma\tau(\boldsymbol{\beta})) \\ &= (\boldsymbol{\alpha},(\tau\sigma+\sigma\tau)\boldsymbol{\beta}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha},(\sigma\tau+\tau\sigma)\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

因此命题成立。

例 9.12 设 V 为 n 维欧几里得空间, 证明：对 V 的每一个线性变换 σ, 存在 V 的唯一的线性变换 σ^*, 使 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \sigma^*(\boldsymbol{\beta})), \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 这个 σ^* 称为 σ 的共轭变换。

证明：在 V 中任取标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$, 任取 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 若 σ^* 存在, 则有

$$\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}) = (\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\varepsilon}_1)\, \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + (\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\varepsilon}_n)\, \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

于是直接定义

$$\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}) = (\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \boldsymbol{\alpha})\, \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + (\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n), \boldsymbol{\alpha})\, \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

那么 σ^* 为 V 上的变换, 且

$$(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_i), \boldsymbol{\alpha}) = (\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\varepsilon}_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

故对任给的 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V$, 有

$$\begin{aligned}(\sigma(\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha})&=\left(x_1\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\right)+\cdots+x_n\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_n\right),\boldsymbol{\alpha}\right)\\&=x_1\left(\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_1\right),\boldsymbol{\alpha}\right)+\cdots+x_n\left(\sigma\left(\boldsymbol{\varepsilon}_n\right),\boldsymbol{\alpha}\right)\\&=x_1\left(\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\varepsilon}_1\right)+\cdots+x_n\left(\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\varepsilon}_n\right)\\&=(\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\beta},\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}))\end{aligned}$$

对 $\forall\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V$, 有

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^*\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right)\right)&=\left(\sigma(\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right)\\&=\left(\sigma(\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha}_1\right)+\left(\sigma(\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha}_2\right)\\&=\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^*\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)\right)+\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^*\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\right)\end{aligned}$$

于是

$$\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^*\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\right)-\sigma^*\left(\boldsymbol{\alpha}_1\right)-\sigma^*\left(\boldsymbol{\alpha}_2\right)\right)=0$$

所以

$$\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}_2)$$

同理可证

$$\sigma^*(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma^*(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall \boldsymbol{\alpha}\in V, k\in \mathbf{R}$$

所以 σ^* 是 V 的线性变换。

又若另有 V 的线性变换 τ, 使得对 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in V$ 也有 $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}, \tau(\boldsymbol{\beta}))$, 则有 $(\boldsymbol{\alpha}, \tau(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha}, \sigma^*(\boldsymbol{\beta}))$, 故 $(\boldsymbol{\alpha}, (\tau-\sigma^*)(\boldsymbol{\beta}))=0(\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in V)$, 所以 $(\tau-\sigma^*)(\boldsymbol{\beta})=0(\forall \boldsymbol{\beta}\in V)$, 所以 $\tau=\sigma^*$ 。

例 9.13 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

证明: 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\lambda\boldsymbol{x}_0$, 进而有

$$\mathbf{0}=\left(\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}_0=\left(\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3\right)\boldsymbol{x}_0$$

而 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应 λ 的特征向量, 所以 $\boldsymbol{x}_0\neq\mathbf{0}$, 因此

$$\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3=(\lambda-1)\left(\lambda^2-2\lambda+3\right)=0$$

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$ 。因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 其特征值为实数, 故只有 $\lambda=1$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值就是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1>0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵。

例 9.14 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$, 它的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1 , 特征值之积为 -12 。

(1) 求 a,b 的值。

(2) 利用正交线性替换将实二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交线性替换和对应的正交矩阵。

解：(1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 。

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3)$ 。由题设, 有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a+2+(-2)=1$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12$$

又 $b>0$, 解之得 $a=1, b=2$ 。

（2）由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\left|\begin{array}{ccc}\lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2\end{array}\right|=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=-3$ 。

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,0,1)'$, $\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,0)'$ 。

对于 $\lambda_3=-3$, 解齐次线性方程组 $(-3\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-2)'$ 。由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 已是正交向量组, 因此将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化, 可得 $\boldsymbol{\eta}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)'$,
$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,0)'$, $\quad \boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)'$ 。

令矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 进而在正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下, 有 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, 且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$ 。

例 9.15 设 n 级方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。证明:

（1） $\lambda_i \neq 1(i=1,2,\cdots,n)$ 。

（2） 若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} & & & \\ & \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \end{pmatrix}$$

证明: （1） 由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 得

$$\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\right)$$

进而得

$$\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\right)\left(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}_n$$

所以 $|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|\neq 0$, 因此 1 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 从而知 $\lambda_i\neq 1(i=1,2,\cdots,n)$ 。

（2）设 $\boldsymbol{X}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量 $(i=1,2,\cdots,n)$, 于是由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i$$

推出

$$\lambda_i\boldsymbol{X}_i+\lambda_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i$$

即

$$\left(1-\lambda_i\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i \tag{20}$$

由（1）知 $\lambda_i\neq 1$, 再由式 (20) 得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\cdots,n)$, 因此 $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1},\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2},\cdots,\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个特征值。

因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, 所以得 $\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{A}$, 而 $\left(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\right)\left(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}_n$, 得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}\right)^{-1}$$

而 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 因此 $\boldsymbol{B}$ 为实矩阵, 且

$$\boldsymbol{B}' = \left(\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\right)' = \left(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

所以 $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$, 知 $\boldsymbol{B}$ 为实对称阵, 故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} & & & \\ & \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \end{pmatrix}$$

内容概要

例 9.16 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

的解空间为 W, 求向量 $(2,3,4,5)'$ 在 W 上的内射影及到 W 的距离。

解: 原方程组 (21) 的一个基础解系为 $\xi_1 = (-1,1,0,0)'$, $\xi_2 = (0,0,-1,1)'$, ξ_1, ξ_2 是 W 的一组正交基, 设 $\xi_3 = (y_1, y_2, y_3, y_4)' \in \mathbf{R}^4$ 与 ξ_1, ξ_2 都正交, 得齐次线性方程组 $\begin{cases} -y_1 + y_2 = 0 \\ -y_3 + y_4 = 0 \end{cases}$, 于是可取 $\xi_3 = (1,1,1,1)'$ 。

设 $\xi_4 = (z_1, z_2, z_3, z_4)' \in \mathbf{R}^4$ 与 ξ_1, ξ_2, ξ_3 都正交, 得齐次线性方程组 $\begin{cases} -z_1 + z_2 = 0 \\ -z_3 + z_4 = 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \end{cases}$, 于是可取 $\xi_4 = (1,1,-1,-1)'$ 。

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 单位化，得 $\mathbf{R}^4$ 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)'$, $\boldsymbol{\eta}_2=\left(0,0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)'$, $\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$, $\boldsymbol{\eta}_4=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)'$，其中 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 为 W 的一组标准正交基。

记 $\boldsymbol{\beta}=(2,3,4,5)'$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 有唯一分解式

$$\boldsymbol{\beta}=((\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_1)\,\boldsymbol{\eta}_1+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_2)\,\boldsymbol{\eta}_2)+((\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_3)\,\boldsymbol{\eta}_3+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_4)\,\boldsymbol{\eta}_4)=\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}_1=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_1)\,\boldsymbol{\eta}_1+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_2)\,\boldsymbol{\eta}_2\in W$, $\boldsymbol{\gamma}_2=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_3)\,\boldsymbol{\eta}_3+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_4)\,\boldsymbol{\eta}_4\in W^{\perp}$ 。

所以向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,3,4,5)'$ 在 W 上的内射影 $\boldsymbol{\gamma}_1=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$, 且 $\boldsymbol{\beta}$ 到 W 的距离为

$$d=|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}_1|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{53}$$